Oberlin College Library
SEP 27 1946

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon
vereinigt mit dem
Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik
begründet von Johannes Stark
herausgegeben von Professor Dr. Dr. h. c. P. Debye
unter Mitwirkung der
Physikalisch-Technischen Reichsanstalt
Schriftleitung: Dr. Ludwig Bewilogua, Berlin-Dahlem

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für RM 18.20 postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis RM 16.80 vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikal. Gesellschaft im Inland RM 18.20, im Ausland RM 16.80. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen und Beilagen werden nach Tarif berechnet. Alle Manuskripte und damit zusammenhängende Zuschriften sind an Dr. Ludwig Bewilogua, Berlin-Dahlem, Boltzmannstraße 22, Institut für theoretische Physik, zu senden. — Bestellungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

Nr. 1/2 — Ausgegeben im April 1944 — Nr. 21331/34. Printed in Germany — 45. Jahrgang

INHALT:

Abhandlungen:

H. Marschall, Grundlegung der elektronenoptischen Theorie eines Massenspektrographen. S. 1.

R. Reiter, Die Glimmentladung unter der Wirkung von sichtbarem Licht und Röntgenstrahlen. S. 37.

R. E. Liesegang, Eine zweidimensionale Hydrodynamik. S. 44.

W. Leo, Zur Absolutmessung der spektralen Empfindlichkeit von Photozellen. S. 46.

A. Scheibe und U. Adelsberger, Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich 10^h 40^{min} für November 1943. S. 47.

A. Scheibe und U. Adelsberger, Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich 10^h 40^{min} für Dezember 1943. S. 47.

K. Küpfmüller, Zur Geschichte des Elektronenmikroskops. S. 47.

Nachrichten: S. 52.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

P. Jahn

Zum 24. März 1944

Reproduction to complete this periodical formerly reproduced and distributed in the public interest by United States Office of Alien Property Custodian.
Lithoprinted by EDWARDS BROTHERS, INC., Ann Arbor, Michigan, U.S.A. The quality of this reprint is determined by the printing and paper in the original copy used.
Published by J. W. EDWARDS, *PUBLISHER*, for Foreign Periodicals, Inc., Ann Arbor, Michigan, U.S.A.

0-20

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 1/2 — 1. April 1944 — Redaktionsschluß für Nr. 1/2 am 15. März 1944 — 45. Jahrgang

INHALT:

Abhandlungen:

H. Marschall, Grundlegung der elektronenoptischen Theorie eines Massenspektrographen. S. 1.

R. Reiter, Die Glimmentladung unter der Wirkung von sichtbarem Licht und Röntgenstrahlen. S. 37.

R. E. Liesegang, Eine zweidimensionale Hydrodynamik. S. 44.

W. Leo, Zur Absolutmessung der spektralen Empfindlichkeit von Photozellen. S. 46.

A. Scheibe und U. Adelsberger, Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich $10^h\ 40^{min}$ für November 1943. S. 47.

A. Scheibe und U. Adelsberger, Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich $10^h\ 40^{min}$ für Dezember 1943. S. 47.

K. Küpfmüller, Zur Geschichte des Elektronenmikroskops. S. 47.

Nachrichten. S. 52.

ABHANDLUNGEN

Grundlegung der elektronenoptischen Theorie eines Massenspektrographen.*)

Von Hans Marschall

Inhalt

Es wird die Theorie eines Massenspektrographen entwickelt, für dessen elektromagnetisches Umlenkfeld keinerlei spezielle Voraussetzungen getroffen sind. Zur Berechnung der Ionenbahnen wird eine zur geometrischen Optik analoge Rechenweise benutzt, bei der das von Glaser für die geometrische Elektronenoptik formulierte Fermatsche Prinzip als Ausgangspunkt dient. Im Rahmen der Näherungsrechnung wird eine Gaußsche Dioptrik definiert, mit deren Hilfe die geometrisch-optischen Konstanten des Gerätes, wie z. B. Brennweiten, Bild- und Gegenstandsweite, Dispersion usw. berechnet werden können. Die Weiterführung der Rechnung liefert die Abbildungsfehler im Sinne der geometrischen Lichtoptik; das Aussehen der Abbildungsfehler wird für einen Sonderfall des Umlenkfeldes (Punktabbildung) ausführlich diskutiert.

I. Einleitung und Ziel der Arbeit

Der moderne Massenspektrograph kann als eine Übertragung des optischen Spektrographen auf Ionenstrahlen angesehen werden. Während der Lichtspektrograph zur Messung von Lichtwellenlängen dient, soll der Massenspektrograph die Messung von Massen elektrisch geladener Materieteilchen ermöglichen. Die Glaslinsen und Glasprismen des optischen Spektralgerätes sind beim Massenspektrographen durch elektrische und magnetische Felder — die Prismen und Linsen der Elektronenoptik — ersetzt. Genau wie bei dem optischen Gerät werden die aus einem Spalt in verschiedenen Richtungen austretenden Materiestrahlen durch die elektronenoptischen Linsen bzw. Prismen gesammelt bzw. umgelenkt und in einer Ebene fokussiert. Diese Richtungsfokussierung bewirkt eine Abbildung des Spaltes in einer Bildebene. Der Zerlegung einer Korpuskularstrahlung nach der Masse der einzelnen Ladungsträger tritt nun eine Schwierigkeit entgegen, denn während die Größe der Ablenkung eines Lichtstrahles in einem Prisma oder in einer Linse einzig und allein durch die Frequenz des Lichtes gegeben ist, sind für die Beeinflußbarkeit eines Materiestrahles durch elektrische und magnetische Felder zwei Parameter, nämlich das Verhältnis von Ladung zu Masse und die Geschwindigkeit maßgebend. Die in der Massenspektrographie gewünschte Aufspaltung eines Strahlenbündels nach Teilchen gleicher Masse bei bekannter Ladung ist deshalb nur dann möglich, wenn entweder Korpuskeln gleicher Geschwindigkeit verwendet werden, oder aber, wenn es durch besondere Maßnahmen an dem Spektralgerät gelingt, den Einfluß der Geschwindigkeit auf die Ablenkung rückgängig zu machen. Das ist in der Tat möglich. Es gelingt, Teilchen verschiedener Geschwindigkeit wieder an einem Punkte zu vereinigen. Man spricht dann von Geschwindigkeitsfokussierung; einen Massenspektrographen, der neben der Richtungsfokussierung noch Geschwindigkeitsfokussierung leistet, nennt man einen doppelfokussierenden Massenspektrographen.

*) D 11.

Reproduction to complete this periodical formerly reproduced and distributed in the public interest by United States Office of Alien Property Custodian. Lithoprinted by EDWARDS BROTHERS, INC., Ann Arbor, Michigan, U.S.A. The quality of this reprint is determined by the printing and paper in the original copy used. Published by J. W. EDWARDS, PUBLISHER, for Foreign Periodicals, Inc., Ann Arbor, Michigan, U.S.A.

Doppelfokussierende Massenspektrographen sind von verschiedener Seite entwickelt worden. Dabei wurden stets ein elektrisches Radialfeld und ein homogenes Magnetfeld derart hintereinander geschaltet, daß ihre Kraftlinien senkrecht zueinander standen, die Ablenkung der Ionen also innerhalb einer Ebene erfolgte. Die Richtungsfokussierung ist eine allgemeine Eigenschaft (Linseneigenschaft) solcher Felder; die gleichzeitige Geschwindigkeitsfokussierung wird durch geeignete Abstimmung der geometrischen Daten der Apparatur aufeinander erreicht. Dies geschieht bei den Apparaten von Herzog und Mattauch[1)2)], von Bainbridge und Jordan[3)], von Dempster[4)] und von Aston[5)] in verschiedener Weise, am vollkommensten wohl bisher bei Herzog und Mattauch, die bei einer sehr ausgedehnten Massenskala für jeden Punkt der photographischen Platte die Doppelfokussierung herbeiführen, während dies bei den anderen Autoren jeweils nur für einen kleinen Teil der Bildebene gilt.

Da bei allen diesen Apparaturen die Felder längs der zur Umlenkrichtung senkrechten Koordinate konstant sind, so findet eine vollständige Richtungsfokussierung nur für die in der „Umlenkebene" verlaufenden Strahlen statt. Die von einem Punkt wegfliegenden Teilchen werden deshalb in der Bildebene in einem Strich vereinigt. Es liegt also das ionenoptische Analogon zur Zylinderlinse der Optik vor. Die Bahngleichungen werden von den genannten Autoren nur in erster Näherung berechnet; die auftretenden Abbildungs- bzw Ablenkungsfehler bleiben also unbekannt. Ferner werden das elektrische und das magnetische Feld „abgehackt" angenommen, so daß die am Anfang und Ende der Feldbereiche auftretenden Streufelder nicht berücksichtigt werden.

Da eine systematische Erfassung der möglichen Bildfehler etwa im Sinne der in der Lichtoptik gebräuchlichen Begriffe und Methoden an Hand der in der Massenspektrographie bisher durchgeführten theoretischen Arbeiten kaum möglich ist, soll hier von Anfang an ein anderer Weg eingeschlagen werden. Es wird, ausgehend vom Fermatschen Prinzip, wie es Glaser[6)] für die Elektronenoptik formuliert hat, von Anbeginn eine zur geometrischen Optik analoge Rechenweise eingeführt, die den zeitlichen Verlauf der Ionenbewegung nicht mit enthält. Es wird dann zunächst das ionenoptische Analogon zur „Gaußschen Dioptrik" als erste Näherung entwickelt. Diese Näherung genügt, um die geometrisch-optischen Konstanten wie Brennweite, Bild- und Gegenstandsweite, Dispersion usw. zu berechnen. Die Felder, die zur Verwendung gelangen können, sind dabei noch sehr weitgehend freigelassen, so daß auch in dieser Hinsicht ein Fortschritt erzielt wird. Darüber hinaus ergeben sich durch konsequente Weiterführung des Näherungsverfahrens (Glieder zweiter Ordnung) die Abbildungsfehler im Sinne der geometrischen Lichtoptik. Ein Sonderfall (Punktabbildung) wird ausführlicher abgehandelt und die dafür erforderlichen Formen von Kondensatorelektroden und Polschuhen angegeben.

Bei dem in dieser Arbeit eingeschlagenen Weg konsequenter Reihenentwicklungen sind Geschwindigkeits- und Massendispersion als kleine Glieder behandelt. Das erste ist wohl in jedem Fall, auch bei den von anderen Autoren entwickelten Geräten statthaft. Das zweite dagegen schränkt die Verwendungsfähigkeit der hier gebotenen Theorie beträchtlich ein. Ein Apparat wie der Mattauchsche mit seiner langen Massenskala zählt nicht unter die hier behandelten Fälle. Es ist aber natürlich durchaus sinnvoll, auch Apparate mit einer kurzen Skala zu bauen, wenn man dafür an Auflösungsvermögen gewinnt.

Da über den Aufbau des elektromagnetischen Umlenkfeldes keinerlei spezielle Voraussetzungen getroffen sind, kann man durch besondere Formgebung der magnetischen Polschuhe oder der Elektroden die Abbildungsfehler stark beeinflussen, so daß es möglich erscheint, diese Tatsache zur Verringerung besonders störender Fehler zu benutzen. Genauere Untersuchungen hierüber sollen einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

II. Das elektromagnetische Umlenkfeld und die Ableitung der Bewegungsgleichungen

Zunächst müssen wir uns mit dem Aufbau des elektromagnetischen Umlenkfeldes befassen und betrachten hierzu Fig. 1. Das elektrische

1) R. Herzog und J. Mattauch: Über einen neuen Massenspektrographen. Z. Physik **89** (1934) 786.

2) R. Herzog, Ionen und elektronenoptische Zylinderlinsen und Prismen. Z. Physik **89** (1934) 447.

3) T. Bainbridge und E. B. Jordan, Mass Spectrum Analysis. Physic. Rev. **50** (1936) 282.

4) A. J. Dempster, Electric and magnetic focusing in Mass Spectroscopy. Physic. Rev. (2) **51** (1937) 67, Nr. 2.

5) F. W. Aston, A second-order focusing Mass Spectrograph and isotopic weights by the doublet method. Proc. Roy. Soc. London (A) **162** (1937) 391.

6) W. Glaser, Über geometrisch-optische Abbildung durch Elektronenstrahlen. Z. Physik **80** (1933) 451.

und magnetische Kraftfeld sollen beide am gleichen Ort auf die Korpuskularstrahlen einwirken. Der Bereich, in dem dies geschieht — der Umlenkraum — ist in Fig. 1 mit Raum II bezeichnet. Die Ionenquelle mit dem das Strahlenbündel begrenzenden Spalt befinde sich im Raum I, den wir auch als Gegenstandsraum bezeichnen wollen, während im Raum III, dem Bildraum, eine photographische Platte oder ein Faradaykäfig als Auffänger für die Ionenstrahlen vorhanden sei. Gegenstands- und Bildraum sind im wesentlichen feldfrei; nur in der Nähe der beiden Trennebenen zum Raum II sind die Streufelder des Umlenkraumes vorhanden. Im Umlenkraum werden zweckmäßig gebung dieses Linienzuges zu kennen; mit anderen Worten: Beide Kraftfelder werden zweckmäßig durch Potenzreihen mit u und v als Entwicklungsparametern dargestellt. Die elektrische Feldstärke kann aus dem skalaren elektrischen Potential φ abgeleitet werden. Da das für die Bewegung der Masseteilchen interessierende Gebiet, abgesehen von dem vernachlässigbaren Ladungstransport durch die Ionen stromfrei ist, so kann die magnetische Feldstärke ebenfalls aus einem skalaren magnetischen Potential ψ gewonnen werden.

Im Umlenkraum ist die Linie $u = 0$, $v = 0$ mit dem Kreisbogen $\varrho = 0$ identisch. Sind die Reihen für die Potentiale in diesem Gebiet be-

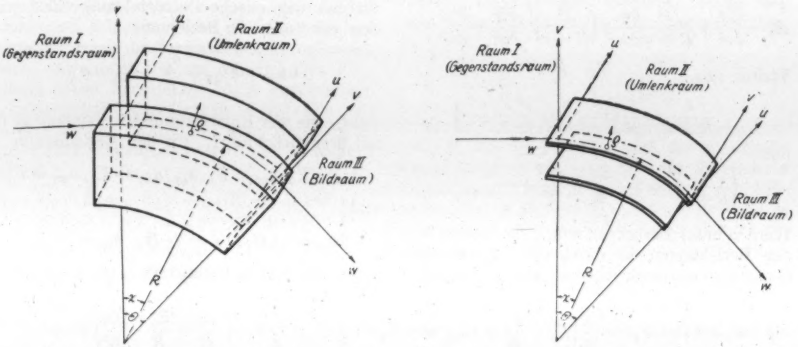


Fig. 1. Das elektromagnetische Umlenkfeld und seine Zuordnung zu den Koordinaten u, v, w. Die linke Figur zeigt die Anordnung der Polschuhe des Umlenkmagneten, während in der rechten Abbildung eine Elektrodenanordnung zur Erzeugung des elektrischen Radialfeldes dargestellt ist. Die Definition der Räume *I*, *II* und *III* geht aus beiden Abbildungen hervor.

Zylinderkoordinaten verwendet, während in den anderen beiden Räumen Cartesische Koordinaten angebracht sind. Um unnötig viele Indices zu vermeiden, sollen einheitlich in allen drei Räumen die rechtwinkligen Koordinaten u, v und w benutzt werden. Die Bedeutung der u, v, w in einer Formel hängt also davon ab, für welchen der drei Räume der entsprechende mathematische Ausdruck angeschrieben ist. Treten in einer Gleichung die Koordinaten zweier oder dreier Räume gleichzeitig auf, so wird durch eine zweckmäßig gewählte Symbolik dafür gesorgt, daß Mißverständnisse nicht auftreten. Im Umlenkraum ist u mit $\varrho = r - R$ und w mit dem Bogen $R\chi$ identisch.

Die Korpuskeln bewegen sich auf ihrem Weg vom Gegenstandsraum über den Umlenkraum zum Bildraum in der Nähe des Linienzuges $u = 0$, $v = 0$. Es ist also wichtig, die elektrischen und magnetischen Kräfte in der Umkannt, so ergibt sich durch den Grenzübergang $R \to \infty$ sofort die Reihendarstellung der Potentiale in den Räumen I und III. Im Raum II denken wir uns eine Ebene $w = \text{const.}$; aus Fig. 1 lassen sich für φ und ψ in der gedachten Ebene folgende Symmetrieeigenschaften ablesen[7])

$$\varphi(u, v) = \varphi(-u, v),$$
$$\psi(u, v) = -\psi(-u, v).$$

Bezüglich der v-Koordinate besitzen beide Potentiale keinerlei Symmetrieeigenschaften, so daß beide durch die Potenzreihen

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= a_{00} + a_{01}v + a_{02}v^2 + a_{20}u^2 + a_{03}v^3 \\ &\quad + a_{21}u^2v + \cdots \\ -\psi &= b_{10}u + b_{11}uv + b_{12}uv^2 + b_{30}u^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

7) Siehe z. B. G. Wendt, Fehler bei Ablenkung eines Kathodenstrahlbündels durch einfachsymmetrische Ablenkorgane. Z. Physik **119** (1942) 423.

dargestellt werden können. Wie sich später zeigen wird, sind die Reihen so weit angeschrieben, wie es zur Bestimmung der Fehler zweiter Ordnung notwendig ist. Denken wir uns die $a_{m,n}$ und die $b_{m,n}$ als Funktionen der w-Koordinate gegeben, so ist durch die Gleichung (1) das elektrische und magnetische Potential innerhalb des Umlenkraumes festgelegt. Die Entwicklungskoeffizienten $a_{m,n}$ und $b_{m,n}$ sind dabei nicht unabhängig voneinander, da für die Reihen (1) die Potentialgleichungen

$$\Delta\varphi = 0 \text{ und } \Delta\psi = 0$$

erfüllt sein müssen. Wegen $v = \varrho = r - R$ und $w = R\chi$ gilt für φ:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{1}{R+v}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \left(\frac{R}{R+v}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = 0.$$

Weiter ist:

$$\frac{1}{R+v} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{v}{R} + \frac{v^2}{R^2} + \cdots\right)$$

und

$$\left(\frac{R}{R+v}\right)^2 = 1 - \frac{2v}{R} + \frac{3v^2}{R^2} + \cdots$$

Werden unter Berücksichtigung der letzten beiden Beziehungen die durch die Laplacesche Gleichung vorgeschriebenen Differentiationen in (1) ausgeführt, so entsteht eine Summe von Gliedern, die in u und v verschiedene Ordnung haben. Diese Summe kann für alle u und v nur dann verschwinden, wenn die Terme gleicher Ordnung einzeln für sich Null werden. Bedeuten die Striche Ableitungen nach w, so ergibt sich:

$$2a_{02} + \frac{a_{01}}{R} + a_{00}'' + 2a_{20} = 0$$

$$6a_{03} - \frac{a_{01}}{R^2} + \frac{2a_{02}}{R} - \frac{2a_{00}''}{R} + a_{01}'' + 2a_{21} = 0.$$

Die sechs Entwicklungskoeffizienten in (1) lassen sich durch die beiden Gleichungen auf vier reduzieren. Völlig analoge Rechnungen können für das magnetische Potential ausgeführt werden; wir finden die Beziehung

$$6b_{30} + 2b_{12} + \frac{b_{11}}{R} + b_{10}'' = 0,$$

welche die vier Entwicklungskoeffizienten in (1) auf drei zurückführt. Mit den Beziehungen

$$a_{00} = E_0,\ a_{01} = E_1,\ a_{02} = E_2,\ a_{03} = E_3$$

und

$$b_{10} = -H_1,\ b_{11} = -H_2,\ b_{12} = -H_3$$

lauten die beiden Potenzreihen für φ und ψ:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= E_0 + E_1 v + E_2 v^2 - \frac{1}{2}\left(E_0'' + \frac{E_1}{R} + 2E_2\right)u^2 + E_3 v^3 - \left(3E_3 + \frac{1}{2}E_1'' + \frac{E_2}{R} - \frac{E_0''}{R} - \frac{E_1}{R^2}\right)u^2 v + \cdots \\ -\psi &= H_1 u + H_2 u v + H_3 u v^2 - \frac{1}{6}\left(2H_3 + \frac{H_2}{R} + H_1''\right)u^3 + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Damit sind auch die elektrischen und magnetischen Feldstärkekomponenten bekannt:

$$\left.\begin{aligned}E_u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \left(E_0'' + \frac{E_1}{R} + 2E_2\right)u + \left(6E_3 + E_1'' + \frac{2E_2}{R} - \frac{2E_0''}{R} - \frac{E_1}{R^2}\right)uv + \cdots \\ E_v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -E_1 - 2E_2 v - 3E_3 v^2 + \left(3E_3 + \frac{1}{2}E_1'' + \frac{E_2}{R} - \frac{E_0''}{R} - \frac{E_1}{2R^2}\right)u^2 + \cdots \\ E_w &= -\frac{R}{R+v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial w} = -E_0' + \left(\frac{E_0'}{R} - E_1'\right)v + \left(\frac{E_1'}{R} - E_2' - \frac{E_0'}{R^2}\right)v^2 + \frac{1}{2}\left(E_0''' + \frac{E_1'}{R} + 2E_2'\right)u^2 - \cdots \\ H_u &= -\frac{\partial\psi}{\partial u} = H_1 + H_2 v + H_3 v^2 - \frac{1}{2}\left(2H_3 + \frac{H_2}{R} + H_1''\right)u^2 + \cdots \\ H_v &= -\frac{\partial\psi}{\partial v} = H_2 u + 2H_3 u v + \cdots \\ H_w &= -\frac{R}{R+v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial w} = H_1' u + \left(\frac{H_1'}{R} - H_2'\right)uv + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Aus Gleichung (2) läßt sich sofort als Spezialfall das Potential des ebenen Zylinderkondensators herleiten. Bei diesem ist φ nur von der Koordinate $v = \varrho$ abhängig. Daher verschwinden alle Ableitungen der Feldkoeffizienten nach w, so daß $E_w = 0$ wird; weiter müssen die Gleichungen

$\frac{E_1}{R}+2E_2=0$ und $3E_3+\frac{E_2}{R}-\frac{E_1}{R^2}=0$ erfüllt sein, so daß sich für das Potential die Entwicklung

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=E_0+E_1v-\frac{1}{2}\frac{E_1}{R}v^2+\frac{1}{3}\frac{E_1}{R^2}v^3+\cdots\\&=E_0+E_1\cdot R\cdot\ln\left(1+\frac{v}{R}\right)=E_0+E_1R\cdot\ln\left(\frac{r}{R}\right)\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

mit

$$E_v=-\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-E_1\cdot\frac{R}{r}=-\frac{E_1}{1+\frac{\varrho}{R}}$$

ergibt.

φ und ψ verschwinden an den Begrenzungsebenen des Umlenkraumes gegen den Gegenstands- und Bildraum nicht plötzlich, sondern sie greifen durch die Trennebenen in die beiden zuletzt genannten Räume hinein. Die Darstellung dieser Streufelder durch Potenzreihen in Cartesischen Koordinaten ergibt sich aus den Gleichungen (2) und (3), wenn R gegen Unendlich geht. Im einzelnen wird also im Raum I und III:

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=E_0+E_1u+E_2v^2-\tfrac{1}{2}(E_0''+2E_2)u^2\\&\quad+E_3v^3-(3E_3+\tfrac{1}{2}E_1'')u^2v+\cdots\\-\psi&=H_1u+H_2uv+H_3uv^2\\&\quad-\tfrac{1}{6}(2H_3+H_1''')u^3+\cdots\\E_u&=-\frac{\partial\varphi}{\partial u}=(E_0''+2E_2)\,u\\&\quad+(6E_3+E_1'')uv+\cdots\\E_v&=-\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-E_1-2E_2v-3E_3v^2\\&\quad+(3E_3+\tfrac{1}{2}E_1'')u^2+\cdots\\E_w&=-\frac{\partial\varphi}{\partial w}=-E_0'-E_1'v-E_2'v^2\\&\quad+\tfrac{1}{3}(E_0'''+2E_2')u^2+\cdots\\H_u&=-\frac{\partial\psi}{\partial u}=H_1+H_2v+H_3v^2\\&\quad-\tfrac{1}{2}(2H_3+H_1'')u^2+\cdots\\H_v&=-\frac{\partial\psi}{\partial v}=H_2u+2H_3uv+\cdots\\H_w&=-\frac{\partial\psi}{\partial w}=H_1'u-H_2'uv+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Da die durch die Gleichung (5) dargestellten Streufelder sich an den Begrenzungsebenen stetig an das Umlenkfeld anschließen, müssen die Beträge der Entwicklungskoeffizienten E_n und H_n in den Trennebenen mit den entsprechenden Koeffizienten der Gleichungen (2) bzw. (3) übereinstimmen.

Damit kommen wir zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen für die Korpuskeln. Wir beginnen wieder mit dem Umlenkraum, da die Bewegungsgleichungen für die beiden anderen Räume durch den bereits oben gemachten Grenzübergang aus den Gleichungen des Raumes II abgeleitet werden können. Als Ausgangspunkt zur Berechnung der Teilchenbahnen wählen wir das Fermatsche Prinzip[8]).

$$\delta\int_{P_1}^{P_2}n\,ds=0\qquad(6)$$

worin $n=n(u,\,v,\,w)$ der Brechungsindex ist und ds das in die Richtung der Bahntangente fallende Linienelement bedeutet. Dabei hat man in der Ionenoptik für den Brechungsindex zu setzen

$$n=\sqrt{\frac{U+\varphi}{U}}-\sqrt{\frac{q}{2Mc^2U}}\,(\mathfrak{A},\,\mathfrak{s})\qquad(7)$$

U ist die Voltenergie der Korpuskeln beim Eintritt in das Umlenkfeld, q/M die spezifische Ionenladung, $\mathfrak{A}$ das durch $\mathfrak{H}=\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$ definierte magnetische Vektorpotential und $\mathfrak{s}$ der Einheitsvektor in Bewegungsrichtung. Meist ist es zweckmäßig, statt nach dem Linienelement ds, nach einer der Koordinaten — hier nach dw — zu integrieren. Wegen $ds^2=du^2+dv^2+\left(\frac{v+R}{R}\right)^2\cdot dw^2$ ist $ds=\sqrt{\left(\frac{v+R}{R}\right)^2+u'^2+v'^2}\,dw$ und die Gleichung (6) kann in der Form

$$\delta\int_{P_1}^{P_2}n\sqrt{\left(\frac{v+R}{R}\right)^2+u'^2+v'^2}\,dw=\frac{1}{\sqrt{U}}\,\delta\int_{P_1}^{P_2}F\,dw=0\qquad(8)$$

geschrieben werden.

Die Energie qU ist nicht für alle Ionen gleich groß, sondern es existiert eine Energiedispersion: $qU=q(U_0+\Delta U)$. qU_0 ist dabei die Energie eines „Normalteilchens" der Masse M_0 und der Geschwindigkeit V_0, d. h. es gilt $qU_0=\frac{M_0}{2}V_0^2$. Die Energiedispersion hat verschiedene Ursachen: Die Ionen haben verschiedene Massen und bei ihrer Entstehung auch verschiedene Geschwindigkeiten, also ungleiche Anfangsenergien. Ferner werden die Masseteilchen in der Ionenquelle an verschiedenen Stellen ionisiert und haben deshalb bei ihrem

8) Über die Gültigkeit des Fermatschen Prinzips für die Elektronen- und Ionenoptik vgl. W. Glaser, a. a. O.

Eintritt in das Umlenkfeld nicht alle dasselbe Potential (Anodenspannung) durchfallen. Während die Massendispersion mit dem Spektrographen untersucht werden soll, ist die Geschwindigkeitsdispersion unerwünscht, da sie die Ursache für die ungleiche Ablenkung von Teilchen gleicher Masse ist. Mit Hilfe des oben definierten Normalteilchens lassen sich Masse und Geschwindigkeit einer beliebigen Korpuskel zu

$$\left.\begin{aligned} M &= M_0 + \Delta M = M_0(1+\gamma) \\ V &= V_0 + \Delta V = V_0(1+\beta) \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

angeben. Die Dispersionsgrößen $\gamma = \frac{\Delta M}{M_0}$ und $\beta = \frac{\Delta V}{V_0}$ sind unabhängig voneinander. Da $qU = \frac{M}{2} V^2$ ist, so gilt

$$\left.\begin{aligned} qU &= q(U_0 + \Delta U) = qU_0(1+\gamma)(1+\beta)^2 \\ \text{oder} \qquad U &= U_0(1+\gamma)(1+\beta)^2 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die erste der beiden Gleichungen (9) sowie die Beziehung (10) setzen wir in (7) ein und erhalten nach Ausführung der skalaren Multiplikation:

$$n\sqrt{U} = \sqrt{U_0(1+\gamma)(1+\beta)^2 + \varphi} - \sqrt{\frac{q}{2M_0c^2(1+\gamma)}}\left(A_u\frac{du}{ds} + A_v\frac{dv}{ds} + \frac{R+v}{R}A_w\frac{dw}{ds}\right)$$

Mit Hilfe von (8) ergibt sich die dort eingeführte Funktion F unter Berücksichtigung der Beziehung $\sqrt{\frac{q}{2M_0U_0c^2}} = \frac{V_0}{2U_0c}$ zu:

$$F = \sqrt{(1+\gamma)(1+\beta)^2 + \frac{\varphi}{U_0}}\sqrt{\left(1+\frac{v}{R}\right)^2 + u'^2 + v'^2} - \frac{\frac{V_0}{2U_0c}}{\sqrt{1+\gamma}}\left(A_u u' + A_v v' + \frac{R+v}{R}A_w\right) \quad (11)$$

Das Variationsprinzip (8) hat die Gültigkeit der Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dw}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) - \frac{\partial F}{\partial u} &= 0 \\ \frac{d}{dw}\left(\frac{\partial F}{\partial v'}\right) - \frac{\partial F}{\partial v} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

zur Folge. Durch Ausführung der in (12) vorgeschriebenen Differentiationen erhalten wir mit Hilfe von (11) und unter Beachtung der Definitionsgleichung $\mathfrak{H} = \text{rot}\,\mathfrak{A}$ die Bewegungsgleichungen in ihrer allgemeinen Form:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dw}\left\{v'\sqrt{\frac{(1+\gamma)(1+\beta)^2+\frac{\varphi}{U_0}}{\left(1+\frac{v}{R}\right)^2+u'^2+v'^2}}\right\} - \sqrt{\frac{\left(1+\frac{v}{R}\right)^2+u'^2+v'^2}{(1+\gamma)(1+\beta)^2+\frac{\varphi}{U_0}}}\left\{\frac{1}{2U_0}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{R}\left(1+\frac{v}{R}\right)\frac{(1+\gamma)(1+\beta)^2+\frac{\varphi}{U_0}}{\left(1+\frac{v}{R}\right)^2+u'^2+v'^2}\right\} \\ &\qquad + \frac{\frac{V_0}{2U_0c}}{\sqrt{1+\gamma}}\left[\left(1+\frac{v}{R}\right)H_u - u'H_w\right] = 0 \\ &\frac{d}{dw}\left\{u'\sqrt{\frac{(1+\gamma)(1+\beta)^2+\frac{\varphi}{U_0}}{\left(1+\frac{v}{R}\right)^2+u'^2+v'^2}}\right\} - \sqrt{\frac{\left(1+\frac{v}{R}\right)^2+u'^2+v'^2}{(1+\gamma)(1+\beta)^2+\frac{\varphi}{U_0}}}\frac{1}{2U_0}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\frac{V_0}{2U_0c}}{\sqrt{1+\gamma}}\left[v'H_w - \left(1+\frac{v}{R}\right)H_v\right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Für $R \to \infty$ erhält man die für die Räume I und III gültigen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dw}\left\{v'\sqrt{\frac{(1+\gamma)(1+\beta)^2+\frac{\varphi}{U_0}}{1+u'^2+v'^2}}\right\} - \sqrt{\frac{1+u'^2+v'^2}{(1+\gamma)(1+\beta)^2+\frac{\varphi}{U_0}}}\cdot\frac{1}{2U_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\frac{V_0}{2U_0c}}{\sqrt{1+\gamma}}(H_u - u'H_w) = 0 \\ &\frac{d}{dw}\left\{u'\sqrt{\frac{(1+\gamma)(1+\beta)^2+\frac{\varphi}{U_0}}{1+u'^2+v'^2}}\right\} - \sqrt{\frac{1+u'^2+v'^2}{(1+\gamma)(1+\beta)^2+\frac{\varphi}{U_0}}}\frac{1}{2U_0}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\frac{V_0}{2U_0c}}{\sqrt{1+\gamma}}(v'H_w - H_v) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Von den Gleichungen (13) und (14) wird die Bewegung der Masseteilchen vom Gegenstandsbis zum Bildraum beherrscht. Die Massendispersion γ kann beliebig groß sein, so daß sich stark untereinander abweichende Bahnen ergeben. Um diese genau zu berechnen, müssen die Gleichungen in ihrer allgemeinen Form integriert werden, und die Lösungen an den Trennebenen stetig aneinander gefügt werden. Dies ist im allgemeinen nicht durchführbar, da die auftretenden mathematischen Schwierigkeiten zu groß sind. Es ist aber auch oft gar nicht nötig, die Bewegungsgleichungen in der angeschriebenen allgemeinen Form zu lösen. Für Bahnen, die in der Nähe des Linienzuges $u = 0$, $v = 0$ verlaufen, können die Wurzeln entwickelt werden, so daß je nach dem angestrebten Grade der Genauigkeit nur lineare, quadratische Glieder usw. auftreten, wodurch einfachere Differentialgleichungen entstehen.

III. Die Berechnung der Gaußschen Bahnen; die Abbildungsgesetze und die geometrisch-optischen Konstanten des Umlenkfeldes (Gaußsche Dioptrik)

Wir nehmen zunächst an, daß die Neigungen u' und v' der Bahnen gegen die w-Achse klein gegen eins sind. Dasselbe wird von den Dispersionen β und γ vorausgesetzt. Also ist $u' \ll 1$, $v' \ll 1$, $\beta \ll 1$ und $\gamma \ll 1$. Bei den folgenden Rechnungen werden deshalb von diesen vier Größen nur lineare Glieder berücksichtigt, auch auf die Gefahr hin, daß wir dabei schon zuviel mitnehmen. In Wirkliehkeit kann z. B. $\gamma \approx 10^{-1}$ sein, während u', v' und β in der Größenordnung von etwa 10^{-3} liegen können. Was u und v betrifft, so sollen beide klein gegen die Längsdimensionen (w-Richtung) des Apparates sein, so daß auch hier die Berücksichtigung der linearen Glieder genügt. Die Ionenbewegung spielt sich also in einem schlauchförmigen Raum um die w-Achse ab. Wie steht es aber mit den Reihenkoeffizienten E_n und H_n? Zur Klärung dieser Frage müssen wir zwischen dem Umlenkraum einerseits und Gegenstands- und Bildraum andererseits unterscheiden. Im Raum II werden die Korpuskeln durch das elektromagnetische Kraftfeld gezwungen, in der Nähe des Kreisbogens $u = 0$, $v = 0$ (bzw. $R = \text{const.}$) zu fliegen. Denken wir uns ein Masseteilchen, das sich exakt längs des Kreisbogens bewegt, so muß für dieses die Summe aus elektrischer und magnetischer Kraft gleich der Zentrifugalkraft sein. Letztere ist durch Masse, Geschwindigkeit und Bahnradius gegeben. Diese Daten sind somit auch bestimmend für die elektrische und magnetische Feldstärke. Daraus folgt, daß die Größenordnung der Reihenkoeffizienten E_n und H_n nichts mit der Größenordnung der Koordinaten u und v zu tun hat. Die Konvergenz der Reihenentwicklungen der Potentiale φ und ψ rührt also lediglich von der Kleinheit der Koordinaten u und v her und nicht von der der Reihenkoeffizienten. Anders liegen die Verhältnisse in den Räumen I und III, wie sich weiter unten zeigen wird.

Entwickeln wir die Gleichung (13) bis zu den linearen Gliedern einschließlich, so ergeben sich die in erster Näherung im Raum II gültigen Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dw}(n u') + \omega_u^2 u &= 0\,, \\ \frac{d}{dw}(n v') + \omega_v^2 v + F_1 + F_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} n &= \sqrt{1 + \frac{E_0}{U_0}}\,, \\ \omega_u^2 &= \frac{E_2}{n U_0} + \frac{1}{R}\cdot\frac{E_1}{n 2 U_0} + \frac{E_0''}{n 2 U_0} - \frac{V_0}{2 U_0 c} H_2\,, \\ \omega_v^2 &= -\frac{E_2}{n U_0} - \frac{1}{R}\cdot\frac{E_1}{n U_0} + \frac{1}{n^3}\left(\frac{E_1}{2 U_0}\right)^2 \\ &\quad + \frac{V_0}{2 U_0 c}\left(H_2 + \frac{H_1}{R}\right), \\ F_1 &= -\frac{E_1}{n 2 U_0} + \frac{V_0}{2 U_0 c} H_1 - \frac{n}{R}\,, \\ F_2 &= \frac{1}{n}\left(\frac{E_1}{n^2 2 U_0} - \frac{1}{R}\right)\beta \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{n^3 2 U_0} - \frac{1}{n R} - \frac{V_0}{2 U_0 c} H_1\right)\gamma\,. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Unter n verstehen wir von hier ab den längs des Kreisbogens $\varrho = 0$ veränderlichen Brechungsindex des elektrischen Feldanteils. Legt man an die Ablenkelektroden entgegengesetzt gleich große Spannungen (symmetrische Spannungszuführung), so ist $E_0 = 0$ und $n = 1$. Im folgenden wollen wir annehmen, daß überall $n(w) \approx 1$ ist. Nach den vorausgegangenen Überlegungen haben v'', ω_v^2, v und F_2 in (15) dieselbe Größenordnung, so daß damit auch F_1 als Glied erster Ordnung festgelegt ist. Die einzelnen Terme, aus denen sich F_1 zusammensetzt, können dabei beliebig groß sein; es sind zwar beliebig starke elektrische und magnetische Felder zugelassen, aber die Differenz beider muß in der vorgeschriebenen Größenordnung liegen.

Die Funktion F_1 verursacht eine Abhängigkeit der Bahnkoordinate v von der Geschwindig-

keitsdispersion β. Dies ist nicht erwünscht, da dadurch das Strahlenbündel nicht nur nach Massen, sondern auch nach Geschwindigkeiten aufgespalten wird. Die Abhängigkeit des Bahnverlaufs von β verschwindet („Geschwindigkeitsfokussierung"), wenn in der Umgebung des Kreisbogens $\varrho = 0$ die Differenz $\frac{E_1}{n^2 2 U_0} - \frac{1}{R} = \varepsilon$ klein von erster Ordnung wird, da dann das betreffende Glied in F_2 in der Gaußschen Näherung nicht mehr berücksichtigt zu werden braucht. Wir werden weiter unten erkennen, daß die Geschwindigkeitsdispersion β in den Räumen I und III keinen Einfluß auf die Ionenstrahlen hat. Geschwindigkeitsfokussierung wird also erzielt, wenn die Feldstärken E_1 und H_1 den aus (16) folgenden Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{E_1}{n^2 2 U_0} - \varepsilon\,, \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{n}\cdot\frac{V_0}{4 U_0 c} H_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{n} + \varepsilon\right) \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

genügen. Führen wir die Gleichungen (17) in die zweite, dritte und vierte der Gleichungen (16) ein, so können ε und F_1 vernachlässigt werden, da sonst in den Bewegungsgleichungen Glieder zweiter Ordnung auftreten würden. Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} n &= \sqrt{1 + \frac{E_0}{U_0}}\,, \\ \omega_u^2 &= \frac{E_2}{n U_0} + \frac{n}{R^2} + \frac{E_0''}{n 2 U_0} - \frac{V_0}{2 U_0 c} H_2\,, \\ \omega_v^2 &= -\frac{E_2}{n U_0} + \frac{V_0}{2 U_0 c} H_2 + \frac{n}{R^2}\,, \\ F_1 &= \frac{V_0}{2 U_0 c} H_1 - \frac{E_1}{n 2 U_0} - \frac{n}{R}\,, \\ F_2 &= -\frac{n}{R}\,\gamma\,. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Aus der zweiten und dritten Zeile von (18) folgt die für später wichtige Beziehung

$$\omega_u^2 + \omega_v^2 = \frac{2n}{R^2} + \frac{E_0''}{n 2 U_0}\,. \qquad (19)$$

Durch den Grenzübergang $R \to \infty$ findet man aus (16) für die Funktionen F_1 und F_2 im Bild- und Gegenstandsraum:

$$F_1 = \frac{V_0}{2 U_0 c} H_1 - \frac{E_1}{n 2 U_0}\,,$$

$$F_2 = \frac{E_1}{n^2 2 U_0}\,\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{n^2 2 U_0} - \frac{V_0}{2 U_0 c} H_1\right)\gamma\,.$$

F_1 muß auch hier ein Glied erster Ordnung sein. Das kann wieder dadurch erreicht werden, daß zwar jeder der beiden Summanden beliebig groß ist, die Differenz beider dagegen die vorgeschriebene Größenordnung hat. In praktischen Fällen wird dies jedoch nicht zutreffen, da dann beliebig starke Streufelder zugelassen wären, die zudem noch in einem ganz bestimmten Verhältnis stehen müßten. Deshalb wollen wir annehmen, daß $\frac{V_0}{2 U_0 c} H_1$ und $\frac{E_1}{n^2 2 U_0}$ selbst klein von erster Ordnung sind. Vernünftigerweise behandeln wir dann auch E_2 und H_2 als kleine Größen erster Ordnung[9]). Zur Berechnung des Bahnverlaufs im Gegenstands- und Bildraum dienen also die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} \omega_u^2 &= 0\,, \\ \omega_v^2 &= 0\,, \\ F_1 &= \frac{V_0}{2 U_0 c} H_1 - \frac{E_1}{n 2 U_0}\,, \\ F_2 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Da F_2 der für die Geschwindigkeits- und Massendispersion maßgebende Term ist, sind die Bahnen in den Räumen I und III in erster Näherung von β und γ unabhängig. Das Verschwinden der Funktionen ω_u^2 und ω_v^2 besagt, daß die Streufelder lediglich eine Ablenkung der Masseteilchen von dem geradlinigen Bahnverlauf bewirken; abbildende Eigenschaften haben die Streufelder nicht.

Der Spalt, durch welchen die Korpuskeln in den Gegenstandsraum eintreten, befinde sich in einer zur w-Achse senkrechten Ebene des Gegenstandsraumes an der Stelle $w = -z$. In dieser Ebene, die wir künftig als Gegenstandsebene bezeichnen wollen, verwenden wir die Koordinaten $u = x$, $v = y$. Die Bahn eines von der Gegenstandsebene wegfliegenden Teilchens wird durch die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dw}(nu') + \omega_u^2 u &= 0\,, \\ \frac{d}{dw}(nv') + \omega_v^2 v + F_1 + F_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

beschrieben, wobei F_2, ω_u^2 und ω_v^2 nur innerhalb des Umlenkraumes von Null verschieden sind. Zur Berechnung der Bahn einer Korpuskel betrachten wir nacheinander die drei Räume und fügen die in den einzelnen Gebieten gültigen Lösungen der Bewegungsgleichungen in den

9) Streng genommen trifft diese Betrachtung nicht zu, da an den Grenzen der Räume I und II bzw. II und III, wo die Enden der Kondensatorplatten und Polschuhe liegen, die Felder noch nicht so klein sind, daß man sie bereits als Streufelder bezeichnen darf. Die Vernachlässigung der hierdurch bedingten Felder ist im allgemeinen wohl erlaubt, da die fraglichen Feldbereiche in der w-Richtung sehr kurz sind.

Trennebenen stetig zusammen. Dabei werden die Koordinaten zweckmäßig durch die Indizes I, II und III unterschieden. Bei der Funktion F_1 und der Koordinate w ist dies nicht nötig, da aus den an den Integralen angeschriebenen Integrationsgrenzen zu ersehen ist, in welchem Raum die entsprechenden Funktionen zu nehmen sind.

u_1 und u_2 seien Partikularlösungen der homogenen ersten Gleichung, v_1 und v_2 Partikularlösungen des homogenen Teils der zweiten Gleichung. In der Gegenstandsebene sollen sie folgende Bedingung erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} u_{I1}(-z) &= 1; & u'_{I1}(-z) &= 0;\\ u_{I2}(-z) &= 0; & u'_{I2}(-z) &= 1;\\ v_{I1}(-z) &= 1; & v'_{I1}(-z) &= 0;\\ v_{I2}(-z) &= 0; & v'_{I1}(-z) &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung von (21) hat die Form $u_I = A \cdot u_{I1} + B \cdot u_{I2}$ der mit beliebigen Konstanten A und B multiplizierten Partikularlösungen u_{I1} und u_{I2}. Das allgemeine Integral der zweiten (inhomogenen) Bewegungsgleichung kann durch „Variation der Konstanten" ebenfalls aus den partikulären Lösungen v_{I1} und v_{I2} der homogenen Gleichung aufgebaut werden[10]:

$$v_I = C_0 v_{I1} + D_0 v_{I2}\,.$$

10) Im allgemeinen wird man die Lösung natürlich nicht in dieser Form angeben, denn da die Bewegungsgleichungen (21) im Gegenstands- und Bildraum die einfache Form $\frac{d}{dw}(nu') = 0$ und $\frac{d}{dw}(nv') + F_1 = 0$ haben, sind sie durch Quadratur lösbar. Für eine Bahn, die in der Gegenstandsebene an der Stelle x, y mit den Neigungen x', y' beginnt, lautet die Lösung:

$$u_I = x + x' n(-z) \cdot \int_{-z}^{w} \frac{dw}{n(w)}\,,$$

$$v_I = y + n(-z)\, y' \cdot \int_{-z}^{w} \frac{dw}{n(w)} \int_{-z}^{w} \frac{1}{n(w)} \int_{-z}^{w} F_1\, dw\, dw\,.$$

Die oben gewählte Darstellung mit Hilfe partikulärer Integrale u_{I1}, u_{I2}, v_{I1}, v_{I2} ist deshalb zweckmäßig, weil man im Umlenkraum gezwungen ist, Partikularlösungen einzuführen. Im übrigen gilt

$$u_{I1} = 1,\ u_{I2} = n(-z) \cdot \int_{-z}^{w} \frac{dw}{n(w)}\,,$$

$$v_{I1} = 1,\ v_{I2} = n(-z) \cdot \int_{-z}^{w} \frac{dw}{n(w)}\,,$$

wie man leicht nachrechnet. Setzt man diese partikulären Lösungen in (23) ein, so erhält man die durch Quadratur direkt gefundenen Lösungen.

Für die zu variierenden „Konstanten" $C_0 = C_0(w)$ und $D_0 = D_0(w)$ gilt:

$$C_0 = -\varkappa \int_{-z}^{w} v_{I2} F_1\, dw + C;\quad D_0 = \varkappa \int_{-z}^{w} v_{I1} F_1\, dw + D$$

wie in der Theorie der Differentialgleichungen gezeigt wird. C und D sind die von den Anfangsbedingungen der allgemeinen Lösung abhängigen Integrationskonstanten, während die Konstante $\varkappa$ von der Wahl der partikulären Integrale abhängt:

$$v_{I1}(-z) \cdot v'_{I2}(-z) - v'_{I1}(-z) \cdot v_{I2}(-z) = -\frac{1}{\varkappa \cdot n(-z)}\,.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (22) ergibt sich $\varkappa = -\frac{1}{n(-z)}$. Soll die Bahn der betrachteten Korpuskel in der Gegenstandsebene bei den Koordinaten x, y die Neigung x', y' haben, so lautet die Lösung für den Gegenstandsraum nach der Bestimmung der Integrationskonstanten A, B, C und D:

$$\left.\begin{aligned} u_I &= x u_{I1} + x' u_{I2}\,,\\ v_I &= \left(y + \frac{1}{n(-z)} \int_{-z}^{w} v_{I2} F_1\, dw\right) v_{I1}\\ &\quad + \left(y' - \frac{1}{n(-z)} \int_{-z}^{w} v_{I1} F_1\, dw\right) v_{I2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Werden im Umlenkraum die Größen A, B, C und D im gleichen Sinne wie im Raum I benützt, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} u_{II} &= A u_{II1} + B u_{II2}\,,\\ v_{II} &= \left[C - \varkappa \int_{0}^{w} v_{II2} \left(F_1 - \frac{n}{R}\gamma\right) dw\right] v_{II1}\\ &\quad + \left[D + \varkappa \int_{0}^{w} v_{II1} \left(F_1 - \frac{n}{R}\gamma\right) dw\right] v_{II2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Dabei ist die w-Koordinate der zwischen den Räumen I und II befindlichen Trennebene mit $w = 0$ angenommen. In dieser müssen die Fundamentallösungen u_{II1}, u_{II2}, v_{II1}, und v_{II2} mit den Funktionen u_{I1}, u_{I2}, v_{I1} und v_{I2} stetig zusammengesetzt werden. Es muß also gelten:

$$\left.\begin{aligned} u_{II1}(0) &= u_{I1}(0); & u'_{II1}(0) &= u'_{I1}(0);\\ u_{II2}(0) &= u_{I2}(0); & u'_{II2}(0) &= u'_{I2}(0);\\ v_{II1}(0) &= v_{I1}(0); & v'_{II1}(0) &= v'_{I1}(0);\\ v_{II2}(0) &= v_{I2}(0); & v'_{II2}(0) &= v'_{I2}(0). \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Damit ist auch $u_{II}(0) = u_I(0)$, $u'_{II}(0) = u'_I(0)$, $v_{II}(0) = v_I(0)$, und $v'_{II}(0) = v'_I(0)$; die Konstante $\varkappa$ ist jetzt durch

$$\varkappa = -\frac{1}{[v_{I1}(0)\, v'_{I2}(0) - v_{I1}(0)\, v'_{I2}(0)]\, n(0)}$$

gegeben. Nach (24) sind die Bahnkoordinaten in der Trennebene:

$$u_{II}(0) = A\, u_{III}(0) + B\, u_{II2}(0)\,,$$
$$v_{II}(0) = C\, v_{III}(0) + D\, v_{II2}(0)$$

Da diese Beträge mit den aus Gleichung (23) folgenden Werten

$$u_I(0) = \varkappa\, u_{I1}(0) + \varkappa'\, u_{I2}(0)\,,$$
$$v_I(0) = \left(y + \frac{1}{n(-z)} \int_{-z}^{w} v_{I2}\, F_1\, dw\right) v_{I1}(0) + \left(y' - \frac{1}{n(-z)} \int_{-z}^{w} v_{I1}\, F_1\, dw\right) v_{I2}(0)$$

übereinstimmen müssen, so erhält man unter Berücksichtigung der Beziehungen (25) für die Integrationskonstanten im Umlenkraum:

$$A = \varkappa; \qquad B = \varkappa';$$

$$C = y + \frac{1}{n(-z)} \int_{-z}^{0} v_{I2}\, F_1\, dw;$$

$$D = y' - \frac{1}{n(-z)} \int_{-z}^{0} v_{I1}\, F_1\, dw\,,$$

so daß das Resultat für den Umlenkraum lautet:

$$\left.\begin{aligned} u_{II} &= \varkappa\, u_{III} + \varkappa'\, u_{II2}\,, \\ v_{II} &= \left[y + \frac{1}{n(-z)} \int_{-z}^{0} v_{I2} F_1\, dw + \frac{1}{[v_{I1}(0)\, v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)\, v_{I2}(0)]\, n(0)} \int_{0}^{w} v_{II2} \left(F_1 - \frac{n}{R}\gamma\right) dw\right. \\ &\quad + \left[y' - \frac{1}{n(-z)} \int_{-z}^{0} v_{I1} F_1\, dw - \frac{1}{[v_{I1}(0)\, v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)\, v_{I2}(0)]\, n(0)} \int_{0}^{w} v_{II1} \left(F_1 - \frac{n}{R}\gamma\right) dw\right] v_{II2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Zur Berechnung der Bahnkoordinaten im Bildraum wird das Verfahren fortgesetzt. Sind u_{III1}, u_{III2}, v_{III1} und v_{III2} die Fortsetzungen der Funktionen u_{II1}, u_{II2}, v_{II1} und v_{II2}, und ist ferner $w = R\Theta$ die Koordinate der Begrenzungsebene des Umlenkraumes gegen den Bildraum, so lautet das Ergebnis:

$$\left.\begin{aligned} u_{III} &= \varkappa\, u_{III1} + \varkappa'\, u_{III2}\,, \\ v_{III} &= \left[y + \frac{1}{n(-z)} \int_{-z}^{0} v_{I2} F_1\, dw + \frac{1}{[v_{I1}(0)\, v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)\, v_{I2}(0)]\, n(0)} \int_{0}^{R\Theta} v_{II2} \left(F_1 - \frac{n}{R}\gamma\right) dw\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{[v_{II1}(\Theta)\, v'_{II2}(\Theta) - v'_{II1}(\Theta)\, v_{II2}(\Theta)]\, n(\Theta)} \int_{R\Theta}^{w} v_{III2} F_1\, dw\right] v_{III1} \\ &\quad + \left[y' - \frac{1}{n(-z)} \int_{-z}^{0} v_{I1} F_1\, dw - \frac{1}{[v_{I1}(0)\, v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)\, v_{I2}(0)]\, n(0)} \int_{0}^{R\Theta} v_{II1} \left(F_1 - \frac{n}{R}\gamma\right) dw\right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{[v_{II1}(\Theta)\, v'_{II2}(\Theta) - v'_{II1}(\Theta)\, v_{II2}(\Theta)]\, n(\Theta)} \int_{R\Theta}^{w} v_{III1} F_1\, dw\right] v_{III2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Damit ist der Bahnverlauf von der Gegenstandsebene über den Umlenkraum zur Bildebene formal bekannt.

Für die Bahn eines Teilchens, welches die Gegenstandsebene in Richtung der w-Achse verläßt, verschwinden x, x', y und y'. Da ein Strahl mit diesen Anfangswerten in der Optik als optische Achse bezeichnet wird, definieren wir die genannte Bahn als optische Achse des Umlenkfeldes. Ihre Koordinaten u und v können aus den Gleichungen (23), (26) und (27) entnommen werden. Für den Gegenstandsraum ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} u_{A\,\mathrm{I}} &= 0\,, \\ v_{A\,\mathrm{I}} &= \frac{v_{\mathrm{I}1}}{n(-z)}\int_{-z}^{w} v_{\mathrm{I}2}F_1\,dw - \frac{v_{\mathrm{I}2}}{n(-z)}\int_{-z}^{w} v_{\mathrm{I}1}F_1\,dw\,. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Weiter gilt im Umlenkraum:

$$\left.\begin{aligned} u_{A\,\mathrm{II}} &= 0\,, \\ v_{A\,\mathrm{II}} &= \left[\frac{1}{n(-z)}\int_{-z}^{0} v_{\mathrm{I}2}F_1\,dw + \frac{1}{[v_{\mathrm{I}1}(0)v'_{\mathrm{I}2}(0) - v'_{\mathrm{I}1}(0)v_{\mathrm{I}2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{w} v_{\mathrm{II}2}\left(F_1 - \frac{n}{R}\gamma\right)dw\right] v_{\mathrm{III}1} \\ &\quad - \left[\frac{1}{n(-z)}\int_{-z}^{0} v_{\mathrm{I}1}F_1\,dw + \frac{1}{[v_{\mathrm{I}1}(0)v'_{\mathrm{I}2}(0) - v'_{\mathrm{I}1}(0)v_{\mathrm{I}2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{w} v_{\mathrm{I}1}\left(F_1 - \frac{n}{R}\gamma\right)dw\right] v_{\mathrm{II}2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Endlich erhält man für den Bildraum:

$$\left.\begin{aligned} u_{A\,\mathrm{III}} &= 0\,, \\ v_{A\,\mathrm{III}} &= \left[\frac{1}{n(-z)}\int_{-z}^{0} v_{\mathrm{I}2}F_1\,dw + \frac{1}{[v_{\mathrm{I}1}(0)v'_{\mathrm{I}2}(0) - v'_{\mathrm{I}1}(0)v_{\mathrm{I}2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{R\Theta} v_{\mathrm{II}2}\left(F_1 - \frac{n}{R}\gamma\right)dw\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{[v_{\mathrm{III}1}(\Theta)v'_{\mathrm{II}2}(\Theta) - v'_{\mathrm{II}1}(\Theta)v_{\mathrm{III}1}(\Theta)]\,n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{w} v_{\mathrm{III}2}F_1\,dw\right] v_{\mathrm{III}1} \\ &\quad - \left[\frac{1}{n(-z)}\int_{-z}^{0} v_{\mathrm{I}1}F_1\,dw + \frac{1}{[v_{\mathrm{I}1}(0)v'_{\mathrm{I}2}(0) - v'_{\mathrm{I}1}(0)v_{\mathrm{I}2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{R\Theta} v_{\mathrm{II}1}\left(F_1 - \frac{n}{R}\gamma\right)dw\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{[v_{\mathrm{III}1}(\Theta)v'_{\mathrm{II}2}(\Theta) - v'_{\mathrm{II}1}(\Theta)v_{\mathrm{III}2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{w} v_{\mathrm{III}1}F_1\,dw\right] v_{\mathrm{III}2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Die optische Achse verläuft also in der v-w-Ebene (Umlenkebene). Sie fällt aber nicht mit der mathematisch festgelegten Achse, der w-Achse, zusammen. Dies ist auch verständlich: ein Ion, das die Gegenstandsebene im Ursprung in Richtung der w-Achse verläßt, wird vor Erreichen des Umlenkraumes von dem in v-Richtung unsymmetrischen elektromagnetischen Streufeld bereits etwas von der w-Achse abgelenkt und gelangt nicht bei der Koordinate $v = 0$ in den Raum II. Im Umlenkraum wird die Bahn zwar in der Nähe des Kreisbogens $v = 0$ verlaufen, jedoch nicht mit ihm zusammenfallen. Ferner beschreiben die Korpuskeln wegen ihrer verschiedenen Massen innerhalb des Raumes II auch dann verschiedene Bahnen, wenn sie alle die Gegenstandsebene mit den oben genannten Anfangswerten verlassen. Für jede Masse ist also eine andere optische Achse definiert, wie es Fig. 2 zeigt.

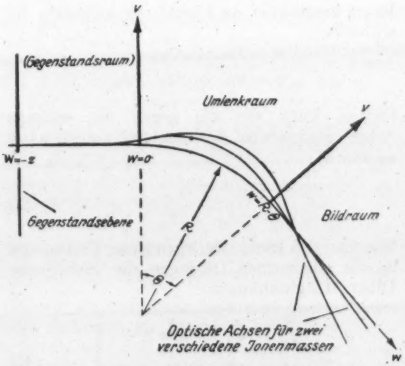


Fig. 2. Die Definition der optischen Achse und ihre Abhängigkeit von der Ionenmasse

Werden die Streufelder am Anfang und am Ende des Umlenkraumes vernachlässigt, ist also $F_1 = 0$ in den Räumen I und III, dann ist die optische Achse im Gegenstandsraum mit der w-Achse identisch, wie aus Gleichung (28) folgt. Für den Umlenkraum und den Bildraum trifft dies ebenfalls zu, wenn γ und die durch (18) gegebene Funktion F_1 verschwinden, wie aus (29) zu entnehmen ist. $\gamma = 0$ bedeutet die für die Bezugsmasse M_0 gültige optische Achse, $F_1 = 0$ hat nach (18) die Gültigkeit der Beziehung $\frac{V_0}{2U_0 c} H_1 - \frac{E_1}{n 2U_0} - \frac{n}{R} = 0$ zur Folge. Für $n = 1$ läßt diese Gleichung eine einfache physikalische Deutung zu: Multiplizieren wir nämlich den ganzen Ausdruck mit $M_0 V_0^2$, so lautet sie nach einer einfachen Umformung $\frac{M_0 V_0}{R} + qE_1 - q\frac{V_0}{c} H_1 = 0$ und besagt, daß die Summe der auf das Masseteilchen wirkenden elektrischen und magnetischen Kräfte gleich der Zentrifugalkraft der längs der Kreisbahn $v = 0$ fliegenden Korpuskel ist. Die optische Achse fällt also dann mit der w-Achse zusammen, wenn das Strahlenbündel nur aus Ionen der Masse M_0 besteht, und wenn bei verschwindenden Streufeldern längs der genannten Kreisbahn zwischen Zentrifugalkraft einerseits und elektromagnetischer Kraft andererseits Kräftegleichgewicht besteht.

In der Optik mißt man die Koordinaten der Gaußschen Bahnen gegen die optische Achse. Dies wollen wir hier ebenfalls tun und führen zu diesem Zweck mit Hilfe der Gleichungen (28), (29) und (30) die Koordinaten u_A und v_A in die Gleichungen (23), (26) und (27) ein. Werden die Betrachtungen nicht auf einen besonderen Raum beschränkt, so können wir allgemein anschreiben:

$$u = x u_1 + x' u_2$$
$$v = y v_1 + y' v_2 + v_A .$$

Daraus folgt für die gegen die optische Achse gemessenen GaußschenKoordinaten u_G und v_G:

$$\left.\begin{aligned} u_G &= x u_1 + x' u_2 , \\ v_G &= v - v_A = y v_1 + y' v_2 . \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Wie man sich leicht überlegen kann, sind u_G und v_G die allgemeinen Lösungen der homogenen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dw}(n u_G') + \omega_u^2 u_G &= 0 , \\ \frac{d}{dw}(n v_G') + \omega_v^2 v_G &= 0 , \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

wobei ω_u und ω_v in den Räumen I und III verschwinden. Da die Funktionen u_1, u_2, v_1 und v_2 als partikuläre Lösungen zweier homogener Gleichungen vom Typus der Gleichung (32) eingeführt wurden (vgl. Gl. 21), so sind sie auch Partikularintegrale der vorstehenden Gleichungen. Zählen wir deshalb die Beträge dieser Fundamentallösungen ebenfalls von der optischen Achse aus, so stellen u_1, v_1, und u_2, v_2 zwei Gaußsche Strahlen dar, von denen einer die Gegenstandsebene bei der Koordinate $x = 1$, $y = 1$ parallel zur w-Achse verläßt, während der zweite im Koordinatenursprung der Gegenstandsebene mit den Neigungen $x' = 1$, $y' = 1$ beginnt. Wie aus den Gleichungen (31) und (32) folgt, wird eine beliebige Gaußsche Bahn, welche in der Gegenstandsebene bei den Koordinaten x, y mit den Neigungen x', y' beginnt, in den drei Räumen durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u_{\mathrm{I}} &= x u_{\mathrm{I}1} + x' u_{\mathrm{I}2} \\ v_{\mathrm{I}} &= y v_{\mathrm{I}1} + y' v_{\mathrm{I}2} \\ u_{\mathrm{II}} &= x u_{\mathrm{II}1} + x' u_{\mathrm{II}2} \\ v_{\mathrm{II}} &= y v_{\mathrm{II}1} + y' v_{\mathrm{II}2} \\ v_{\mathrm{III}} &= y v_{\mathrm{III}1} + y' v_{\mathrm{III}2} \\ u_{\mathrm{III}} &= x u_{\mathrm{III}1} + x' u_{\mathrm{III}2} \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

dargestellt[11]).

In einer beliebigen Ebene $w = \text{const.}$ im Bildraum sind also die Koordinaten u_{III}, v_{III} des Durchstoßpunktes einer Bahn von den Anfangsneigungen x' und y' abhängig. Diese Abhängigkeit verschwindet für die Neigungen x' (y') dort, wo die Koordinate $u_{\mathrm{III}2}$ ($v_{\mathrm{III}2}$) des Fundamentalstrahles u_2, v_2 verschwindet. Da im allgemeinen ω_u^2 und ω_v^2 zwei verschiedene Funktionen sind, werden $u_{\mathrm{III}2}$ und $v_{\mathrm{III}2}$ nicht am gleichen Ort Null, wie es in Fig. 3 gezeigt ist. Betrachtet man daher eine Anzahl Korpuskeln gleicher Masse, welche die Gegenstandsebene im Punkt x, y in verschiedenen Richtungen verlassen, so gibt es im Bildraum zwei Ebenen mit folgenden Eigenschaften: diejenige Ebene, welche durch die Forderung $u_{\mathrm{III}2} = 0$ festgelegt ist, wird von dem Strahlenbündel in einem zur v-Achse parallelen Strich getroffen, dessen Länge von den Extremwerten der Anfangsneigungen y' abhängt; ferner gibt es eine zweite Ebene, deren Lage durch die Forderung $v_{\mathrm{III}2} = 0$ bestimmt ist, und in der ein zur u-Achse paralleler Strich entsteht, dessen Länge von den Neigungen x' abhängt. Das Umlenkfeld hat also im allgemeinen Fall die Abbildungseigenschaften einer Zylinderlinse. Werden die

11) In den Formeln, in denen keine Verwechslungen zu befürchten sind, ist der Index „G" überflüssig.

Reihenkoeffizienten E_0, E_0'', E_2 und H_2 so gewählt, daß $\omega_u^2 = \omega_v^2$ wird, so fallen beide Ebenen zusammen, und ein Punkt der Gegenstandsebene wird wieder als Punkt abgebildet. Nach (19) muß also für die Punktabbildung die Beziehung

$$\omega_u^2 = \omega_v^2 = \frac{n}{R^2} + \frac{E_0''}{4 U_0 n} \tag{34}$$

erfüllt sein. Dieser Sonderfall wird in Abschnitt V ausführlich behandelt.

Wie die letzten Überlegungen zeigen, sind die Richtungsfokussierungen unabhängig von Neigungen x' und y' nach den beiden Seiten ihres Wertbereiches langsam abnehmen wird, so verringert sich auch die Intensität der Striche allmählich, und deshalb ist das Spaltbild in der weiter oben zuerst genannten Ebene in v-Richtung und in der anderen Ebene in der u-Richtung unscharf begrenzt. Da die von Ladungsträgern verschiedener Masse herrührenden Spaltbilder in v-Richtung gegeneinander verschoben sind, ist es wichtig, daß die Abbildungen in dieser Koordinatenrichtung scharf begrenzt sind. Beim Massenspektrographen interessiert also nur die durch $v_{III\,2} = 0$ festgelegte Ebene,

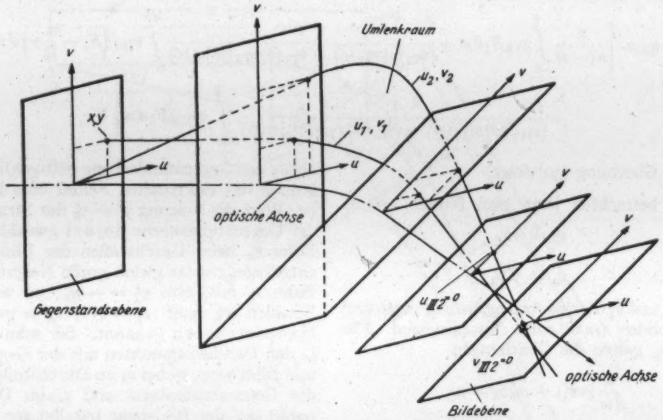


Fig. 3. Der allgemeine Verlauf des Strahles u_2, v_2 sowie des Strahles u_1, v_1 und die Festlegung der Bildebene durch die Forderung $v_{III\,2} = 0$. Im Gegenstands- und Bildraum ist der Strahlverlauf geradlinig angenommen.

der Massendispersion der Ionen. Da aber die Lage der optischen Achse von γ abhängt, entsteht für jede Masse ein zur u- bzw. v-Achse paralleler Strich oder im Falle der Punktabbildung ein Punkt; sämtliche Striche bzw. Punkte sind in v-Richtung gegeneinander verschoben. Betrachten wir jetzt die Gesamtheit der Ionenstrahlen, die den in der Gegenstandsebene befindlichen Spalt verlassen, so erzeugen diese in jeder der drei oben genannten Ebenen eine Anzahl Spaltbilder, die in v-Richtung nebeneinander liegen. Der Mittelpunktsabstand zweier aufeinanderfolgender Bilder ist ein Maß für den Massenunterschied der die beiden Abbildungen erzeugenden Korpuskeln. Im Falle der Punktabbildung sind die Spaltbilder in beiden Koordinatenrichtungen scharf begrenzt; dies ist nicht der Fall, wenn das Umlenkfeld als Zylinderlinse wirkt. Da nämlich die Häufigkeit der die wir künftig als Bildebene bezeichnen. Für diese verwenden wir die Koordinaten $u = \xi$, $v = \eta$ und $w = \zeta$. Die beiden Ebenen, in denen die Strichabbildung stattfindet, zeigt Fig. 3.

Da bei der Bestimmung der Bildebene die u-Koordinaten der Bahnen bedeutungslos sind, wollen wir bei den nun folgenden Berechnungen der geometrisch-optischen Konstanten des Umlenkfeldes nur Strahlen betrachten, welche in der v-w-Ebene (Umlenkebene) verlaufen.

Die Bestimmungsgleichung für die w-Koordinate der Bildebene lautet:

$$v_{III\,2} \equiv \eta_2(\zeta) = 0\,. \tag{35}$$

Ob wir die Bildebene senkrecht zur w-Achse oder senkrecht zur optischen Achse annehmen, spielt in der Gaußschen Näherung keine Rolle, da beide Achsen voraussetzungsgemäß wenig gegeneinander geneigt sind, und deshalb die

Unterschiede in den ξ- und η-Koordinaten einer zur w-Achse senkrechten Ebene und einer zur optischen Achse senkrechten Ebene von zweiter Ordnung klein sind.

Der Gegenstandskoordinate y entspricht nach Gleichung (33) eine Bildkoordinate $\eta = y \cdot \eta_1$; das Verhältnis

$$V = \frac{\eta}{y} = \eta_1 \tag{36}$$

bezeichnen wir analog zur Optik als laterale Vergrößerung des Umlenkfeldes. Die Vergrößerung V erlaubt die Berechnung der Breite des Spaltbildes (Ausdehnung des Spaltbildes in v-Richtung) und ist zur Beurteilung der Auflösung des Spektralgerätes wichtig, wie wir noch sehen werden. In der Optik definiert man ferner als angulare Vergrößerung (Winkelvergrößerung, Konvergenzverhältnis) k das Verhältnis der Tangenten der Winkel, die ein durch einen Achsenpunkt gehender Strahl in Bild- und Gegenstandsraum mit der Achse bildet. Für das Umlenkfeld ergibt sich:

$$k = \frac{y' \eta_2'}{y'} = \eta_2' \,. \tag{37}$$

Die optische Achse durchstößt die Bildebene bei der Koordinate

$$\eta_A = \left[\frac{1}{n(-z)} \int_{-z}^{0} v_{I2} F_1 \, dw + \frac{1}{[v_{I1}(0) v_{I2}'(0) - v_{I1}'(0) v_{I2}(0)] \, n(0)} \int_{0}^{R\Theta} v_{II2} \left(F_1 - \frac{n}{R} \gamma \right) dw \right.$$
$$\left. + \frac{1}{[v_{II1}(\Theta) v_{II2}'(\Theta) - v_{II1}'(\Theta) v_{II2}(\Theta)] \, n(\Theta)} \int_{R\Theta}^{\xi} v_{III2} F_1 \, dw \right] V \tag{38}$$

wie aus Gleichung (30) folgt.

Wir betrachten jetzt zwei Bahnen

$$v_\lambda = y v_1$$

und

$$v_\mu = y' v_2 \,,$$

wobei v_1 und v_2 die den Anfangsbedingungen (22) gehorchenden Gaußschen Strahlen sind. Für v_λ und v_μ gelten die Gleichungen

$$\frac{d}{dw}(n v_\lambda') + \omega_e^2 v_\lambda = 0 \,,$$

$$\frac{d}{dw}(n v_\mu') + \omega_e^2 v_\mu = 0 \,.$$

Nachdem die erste Gleichung mit v_μ und die zweite mit v_λ multipliziert ist, werden beide subtrahiert. Die Differenz kann in der Form

$$\frac{d}{dw}(n v_\lambda' v_\mu) - \frac{d}{dw}(n v_\lambda v_\mu') = 0$$

geschrieben werden, wie man sich durch Ausdifferenzieren leicht überzeugt. Unter Berücksichtigung der Anfangswerte (22) liefert die Integration der letzten Gleichung

$$n v_\lambda' v_\mu - n v_\lambda v_\mu' = -y y' \cdot n(-z) \,.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (36) und (37) folgt hieraus:

$$V \cdot k \cdot \frac{n(\zeta)}{n(-z)} = V k \cdot \sqrt{\frac{U_0 + E_0(\zeta)}{U_0 + E_0(-z)}} = 1 \,. \tag{39}$$

Dies ist der Helmholtzsche Satz der Elektronen- bzw. Ionenoptik. Er besagt, daß das Produkt aus der lateralen und angularen Vergrößerung und dem Quotienten der in der Bild- und Gegenstandsebene gültigen Brechungsindizes des elektrischen Feldes eine Konstante ist. Wird die Neigung $y' = y_0'$ des Strahles v_μ in der Gegenstandsebene derart gewählt, daß die Bahn v_μ beim Durchstoßen der Bildebene die entgegengesetzt gleich große Neigung wie die Bahn v_λ hat, also $\eta_\lambda' = -\eta_\mu'$, so werden die Strahlen v_λ und $v_\nu = v_\lambda + v_\mu = y v_1 + y_0' v_2$ Hauptstrahlen genannt. Sie schneiden sich in den Durchstoßpunkten mit der Gegenstands- und Bildebene, wobei v_λ im Durchstoßpunkt mit der Gegenstandsebene und v_ν im Durchstoßpunkt mit der Bildebene parallel zur optischen Achse verläuft, wie es die Fig. 4 zeigt. Die Tangente

$$\tau_\lambda(w) = (w - \zeta) \eta_\lambda' + \eta_\lambda$$

im Bildraum an den Strahl v_λ in dessen Durchstoßpunkt mit der Bildebene schneidet die optische Achse im bildseitigen Brennpunkt F_b. Im Gegenstandsraum trifft die Tangente

$$\tau_\nu(w) = (w + z) y_0' + y$$

an den Strahl v_ν in dessen Durchstoßpunkt mit der Gegenstandsebene die optische Achse im gegenstandsseitigen Brennpunkt F_g. An der Stelle $w = w_{Hb}$, an welcher die Tangente τ_λ den Abstand

$$y = (w_{H_b} - \zeta) \eta_\lambda' + \eta_\lambda \tag{40}$$

von der optischen Achse hat, liegt die bildseitige Hauptebene H_b. Entsprechend liegt die gegenstandsseitige Hauptebene H_g dort, wo die Tangente τ_ν den Abstand

$$\eta_\lambda = (w_{H_g} + z) y_0' + y \tag{41}$$

von der optischen Achse hat. Der Abstand des gegenstandsseitigen Brennpunktes von der gegenstandsseitigen Hauptebene ist die gegenstandsseitige Brennweite f_g. Sie beträgt nach Fig. 4

$$f_g = -\frac{\eta_\lambda}{y'_0} = -\frac{y}{y'_0} \cdot V \,. \tag{42}$$

Entsprechend ist die bildseitige Brennweite f_b der Abstand des bildseitigen Brennpunktes von der bildseitigen Hauptebene:

$$f_b = -\frac{y}{\eta'_\lambda} = \frac{y}{y'_0} \cdot \frac{1}{k} \,. \tag{43}$$

Der Abstand der Gegenstandsebene von der gegenstandsseitigen Hauptebene ist die Gegenstandsweite a; analog ist die Bildweite b als Abstand der Bildebene von der bildseitigen Hauptebene definiert. Aus Fig. 4 folgt:

$$\left.\begin{aligned} a &= s_g + f_g \,, \\ b &= s_b + f_b \,. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Mit diesen beiden Gleichungen sowie den Beziehungen (44) und (45) kann das Abbildungsgesetz in der bekannten Form

$$\frac{n(\zeta)}{b} - \frac{n(-z)}{a} = \frac{n(\zeta)}{f_b} = -\frac{n(-z)}{f_g} \tag{47}$$

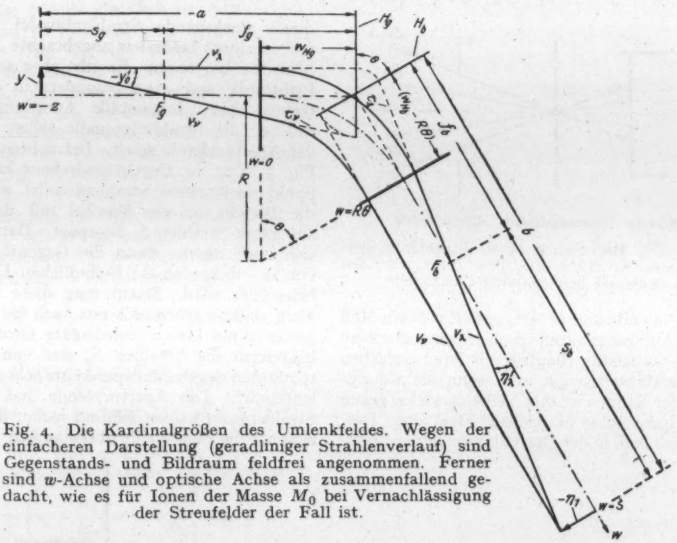


Fig. 4. Die Kardinalgrößen des Umlenkfeldes. Wegen der einfacheren Darstellung (geradliniger Strahlenverlauf) sind Gegenstands- und Bildraum feldfrei angenommen. Ferner sind w-Achse und optische Achse als zusammenfallend gedacht, wie es für Ionen der Masse M_0 bei Vernachlässigung der Streufelder der Fall ist.

Dividiert man die linken und rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen, so ergibt sich unter Berücksichtigung des Helmholtzschen Satzes (39) zwischen den beiden Brennweiten die Beziehung:

$$\frac{n(\zeta)}{f_b} = -\frac{n(-z)}{f_g} \,. \tag{44}$$

Weiter erhält man aus Fig. 4 für den Abstand des Gegenstandes von dem gegenstandsseitigen Brennpunkt: $s_g = \frac{y}{y'_0} = -\frac{f_g}{V}$. Die Bildebene hat vom bildseitigen Brennpunkt den Abstand $s_b = \frac{\eta_\lambda}{\eta'_1} = -\frac{y}{y'_0}\frac{V}{k} = f_b V$. Aus diesen beiden Beziehungen ergibt sich das Abbildungsgesetz:

$$s_g \, s_b = f_g \cdot f_b \,. \tag{45}$$

geschrieben werden. Mit Hilfe der bereits vorhin verwendeten Beziehungen $s_g = -\frac{f_g}{V}$ und $s_b = f_b V$ findet man aus den Gleichungen (46) $f_g = \frac{a}{V-1} V$ und $f_b = \frac{b}{1-V}$. Führt man diese Ausdrücke in das Abbildungsgesetz (47) ein, so läßt sich die Vergrößerung V in bekannter Weise durch a und b ausdrücken:

$$V = \frac{b}{a} \cdot \frac{n(-z)}{n(\zeta)} \,. \tag{48}$$

Von großer Wichtigkeit ist das Auflösungsvermögen des Umlenkfeldes. Wir stellen folgende Frage: wie groß muß der Massenunterschied zweier benachbarter Massen mindestens sein, damit beide am Auffänger des Spektral-

gerätes (Faradaykäfig oder photographische Platte) als zwei verschiedene Massen erkannt werden? Korpuskeln der Masse M_1 und M_2 erzeugen in der Bildebene bei den Achsenkoordinaten η_{A1} und η_{A2} zwei Spaltbilder; η_{A1} und η_{A2} können aus den Gleichungen (38) berechnet werden. Für den Abstand $\eta_{A2} - \eta_{A1}$ der beiden Bildmitten erhalten wir aus Gleichung (38)

$$\eta_{A2} - \eta_{A1} = \frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]n(0)} \cdot \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} V \int_0^{R\Theta} v_{II2} n \, dw \,.$$

Damit die Massen noch getrennt zu erkennen sind, dürfen sich die Spaltbilder nicht gegenseitig überdecken; die Strecke $\eta_{A2} - \eta_{A1}$ darf also höchstens gleich der Bildgröße $V \cdot S$ werden, wenn die Spaltbreite mit S bezeichnet wird. Setzen wir dies in die letzte Gleichung ein, so ist die durch

$$D = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]n(0)} \cdot \frac{1}{R \cdot S} \int_0^{R\Theta} v_{II2} n \, dw \qquad (49)$$

definierte reduzierte Dispersion D ein Maß für das Auflösungsvermögen des Spektrographen.

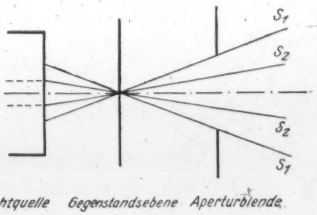


Fig. 5. Die Begrenzung eines Strahlenbündels durch eine Aperturblende bzw. durch die den Gegenstand beleuchtende Lichtquelle.

Die Gaußsche Dioptrik mit ihren einfachen Gesetzmäßigkeiten gilt nur, wenn die Koordinaten der Bahnen un ihre Neigungswinkel gegen die optische Achse hinreichend klein sind. Deshalb muß man in der Optik das von einer Lichtquelle ausgehende Strahlenbündel im allgemeinen durch besonders angebrachte Aperturblenden begrenzen. Es gibt aber auch in der Lichtoptik und ganz besonders in der Elektronen- bzw. Ionenoptik Anordnungen, bei welchen die Strahlungsquelle selbst die Rolle der Aperturblende spielt. Betrachten wir z. B. Fig. 5. Das die Gegenstandsebene im Achsenpunkt verlassende Strahlenbündel wird durch die Blende auf ein Büschel mit den beiden äußersten Strahlen S_1 begrenzt. Daran ändert sich auch nichts, wenn die Gegenstandsebene von der links von ihr befindlichen Lichtquelle beleuchtet wird. Macht man diese jedoch so klein, daß sie schließlich nur noch die durch die gestrichelten Linien angedeutete Größe hat, so begrenzen die Strahlen S_2 das von dem betrachteten Gegenstandspunkt ausgehende Strahlenbündel. Die Aperturblende hat auf den Strahlengang keinen Einfluß mehr; ihre Funktion hat die Lichtquelle übernommen. Ähnliche

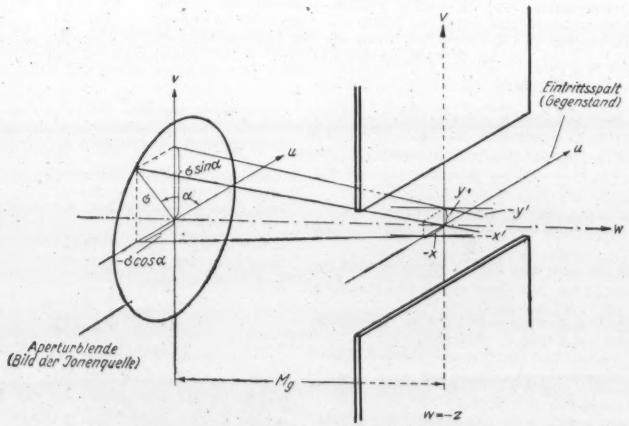


Fig. 6. Die Begrenzung des Strahlenbündels durch die Aperturblende.

Verhältnisse können wir bei dem Massenspektrographen zugrunde legen. Der in der Gegenstandsebene angebrachte Eintrittsspalt, welcher die Rolle des Gegenstandes übernimmt, wird von der Ionenquelle mit Ionen „beleuchtet". Befindet sich zwischen Gegenstandsebene und Umlenkraum keine Blende, so ist die Ionenquelle gleichzeitig Aperturblende, da die Elektroden im Umlenkraum einen solchen Abstand haben, daß sie das Strahlenbündel nicht begrenzen. Das zwischen Ionenquelle und Eintrittsspalt vorhandene Beschleunigungsfeld erzeugt ein Bild der Ionenquelle. Da jede Blende durch eine andere ersetzt werden kann, die mit dem Bild der Blende identisch ist, können wir auch das Bild der Ionenquelle als Aperturblende betrachten. Dies hat den Vorteil des geradlinigen Strahlenganges zwischen Blende und Gegenstand. Die Neigungen x' und y' eines Strahlenbündels, das den Spalt bei den Koordinaten x, y verläßt, können damit in einfacher Weise durch die Blendenkoordinaten ausgedrückt werden. Nehmen wir eine kreisförmige Ionenquelle an, so finden als Blendenkoordinaten zweckmäßig die Zylinderkoordinaten σ, α Verwendung, wie es Fig. 6 zeigt. Für genügend kleine Neigungen x', y' entnimmt man der Figur die folgenden Zusammenhänge:

$$x' = \frac{1}{M_g}(x - \sigma\cos\alpha)\,,$$

$$y' = \frac{1}{M_g}(y - \sigma\sin\alpha)\,.$$

Ersetzt man in Gleichung (31) die Anfangsneigungen mit Hilfe der vorstehenden Beziehungen und läßt α sämtliche Werte von 0 bis 2π durchlaufen, so stellen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u &= \left(u_1 + \frac{u_2}{M_g}\right)x - \frac{\sigma\cos\alpha}{M_g}u_2\,,\\ v &= \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right)y - \frac{\sigma\sin\alpha}{M_g}v_2 \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

ein vom Gegenstandspunkt x, y ausgehendes Strahlenbündel dar.

Die im Rahmen der Gaußschen Dioptrik interessierenden Größen des Umlenkfeldes sind damit behandelt. Um quantitative Aussagen zu machen, müssen die Funktionen $E_0(w)$, $E_1(w)$, $E_2(w)$, $H_1(w)$ und $H_2(w)$ bekannt sein. Wenn der Umlenkwinkel Θ genügend groß ist, so daß das Verhältnis des Bogens $R\Theta$ zum gegenseitigen Abstand der Umlenkelektroden nicht zu klein wird, werden die Streufelder auf den Bahnverlauf keinen merklichen Einfluß ausüben. Wir können dann in guter Näherung mit einem nur innerhalb des Umlenkraumes vorhandenen elektromagnetischen Umlenkfeld rechnen („abgehacktes" Feld). Die oben angeschriebenen Feldkoeffizienten sind dann im Raum II konstant, während sie im Bild- und Gegenstandsraum verschwinden, so daß dort der Bahnverlauf geradlinig ist. Weiter nehmen wir an, daß die Spannungszuführung an die Ablenkelektroden symmetrisch erfolgt; da in diesem Fall E_0 verschwindet, ist $n = 1$. Sollen die Korpuskeln der Masse $M_0(\gamma = 0)$ innerhalb des Umlenkfeldes längs des Kreisbogens $v = 0$ fliegen, so muß im Raum II die Bedingung $F_1 = 0$ erfüllt sein, wie aus (29) oder (38) folgt. Im Umlenkraum gilt also:

$$\left.\begin{aligned} &n = 1\,.\\ &\omega_u^2 = \frac{E_2}{U_0} + \frac{1}{R^2} - \frac{V_0}{2U_0c}H_2 = \text{const}\,,\\ &\omega_v^2 = -\frac{E_2}{U_0} + \frac{1}{R^2} + \frac{V_0}{2U_0c}H_2 = \text{const}\,,\\ &F_1 = \frac{V_0}{2U_0c}H_1 - \frac{E_1}{2U_0} - \frac{1}{R} = 0\\ &F_2 = -\frac{\gamma}{R}\,,\\ &\omega_u^2 + \omega_v^2 = \frac{2}{R^2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (18a)$$

Die Gaußschen Koordinaten gehorchen im Raum II den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u'' + \omega_u^2 u &= 0\,,\\ v'' + \omega_v^2 v &= 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (32a)$$

Im Bild- und Gegenstandsraum gilt: $u'' = 0$, $v'' = 0$. Unter Berücksichtigung der Forderungen (22) lauten die partikulären Integrale u_1, v_1, u_2 und v_2 der Gleichungen (32a):

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \cos\omega_u R\chi\,, \qquad v_1 = \cos\omega_v R\chi\,,\\ u_2 &= -z\cos\omega_u R\chi + \frac{1}{\omega_u}\sin w_u R\chi\,,\\ v_2 &= -z\cos\omega_v R\chi + \frac{1}{\omega_v}\sin\omega_v R\chi\,. \end{aligned}\right\} \quad (22a)$$

Da die u-Koordinaten in diesem Zusammenhange uninteressant sind, betrachten wir zwei in der Umlenkebene verlaufende Strahlen v_1 und v_2, und identifizieren die in (22a) angeschriebenen Gleichungen für v_1 und v_2 mit deren Gaußschen Koordinaten.

Zur Berechnung der Lateralvergrößerung V muß nach (36) die η-Koordinate des Strahles v_1 in der Bildebene bekannt sein. Setzt man die Bahn v_1 an der Trennebene $w = R\Theta$ mit einer Geraden in den Bildraum stetig fort, so lautet deren Gleichung

$$\frac{v_1 - \cos\omega_v R\Theta}{w - R\Theta} = -\omega_v\sin\omega_v R\Theta\,,$$

wie man leicht nachrechnet. Daraus erhalten wir für V:

$$V=\eta_1=\cos\omega_v R\Theta-(\zeta-R\Theta)\omega_v\sin\omega_v R\Theta. \quad (36a)$$

Zur Berechnung der angularen Vergrößerung k ist nach (37) die Neigung des Strahles v_2 in der Bildebene oder was dasselbe ist, in der Ebene $w = R\Theta$ zu bestimmen; aus (22a) folgt direkt durch Differentiation:

$$k = z\omega_v \sin\omega_v R\Theta + \cos\omega_v R\Theta\,. \quad (37a)$$

Da die optische Achse die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$v_A'' + \omega_v^2 v_A - \frac{\gamma}{R} = 0 \quad (21a)$$

ist, gilt bei Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$v_A = \frac{\gamma}{\omega_v^2 R}(1-\cos\omega_v R\chi)\,. \quad (29a)$$

Für den Durchstoßpunkt der optischen Achse durch die Bildebene erhält man hieraus unter Berücksichtigung von (37a) und $Vk = 1$

$$\eta_A = \frac{\gamma}{\omega_v^2 R}(1-V)\,. \quad (38a)$$

Aus dem Helmholtzschen Satz ergibt sich mit den Gleichungen (36a) und (37a) ein Zusammenhang zwischen z und ζ:

$$[z-(\zeta-R\Theta)]\omega_v\cos\omega_v R\Theta = [1+z(\zeta-R\Theta)\omega_v^2]\sin\omega_v R\Theta\,.$$

Löst man diese Gleichung nach z bzw. ζ auf, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{\sin\omega_v R\Theta+\omega_v(\zeta-R\Theta)\cos\omega_v R\Theta}{\omega_v V}\,,\\ \zeta-R\Theta &= \frac{\omega_v z\cos\omega_v R\Theta-\sin\omega_v R\Theta}{\omega_v(\cos\omega_v R\Theta+z\omega_v\sin\omega_v R\Theta)} = \frac{\omega_v z\cos\omega_v R\Theta-\sin\omega_v R\Theta}{\omega_v\cdot k}\,. \end{aligned}\right\} \quad (39a)$$

Mit der letzten Beziehung kann der Ort der Bildebene berechnet werden, wenn die Lage der Gegenstandsebene bekannt ist. Die Gleichungen (39a) können auch aus der Beziehung (35) gewonnen werden. Für die Koordinate w_{H_b} der bildseitigen Hauptebene H_b folgt aus Gleichung (40):

$$w_{H_b} = \frac{y-\eta_2}{\eta_1'} + \zeta\,.$$

Da $\eta_1 = y\cdot V$ und $\eta_1' = -y\omega_v\sin\omega_v R\Theta$ ist, erhalten wir unter Berücksichtigung von (36a):

$$\left.\begin{aligned} w_{H_b} &= -\frac{1-\cos\omega_v R\Theta}{\omega_v\sin\omega_v R\Theta} + R\Theta\\ &= R\Theta - \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_v R\Theta}{2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (40a)$$

H_b liegt also im Abstand $-\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_v R\Theta}{2}\right)$ von der Trennebene $w = R\Theta$. Die Lage der gegenstandsseitigen Hauptebene H_g muß sich also zu

$$w_{H_g} = +\frac{1-\cos\omega_v R\Theta}{\omega_v\sin\omega_v R\Theta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_v R\Theta}{2}\right) \quad (41a)$$

ergeben, da $n(-z) = n(\zeta)$ vorausgesetzt ist. Zur Kontrolle wollen wir w_{H_g} aus Gleichung (41) berechnen. Es ist:

$$w_{H_g} = \frac{\eta_1-y}{y_0'} + z = \frac{y}{y_0'}(V-1) + z\,.$$

Da $y\eta_1' + y_0'\eta_2' = 0$ sein muß, erhalten wir $\frac{y}{y_0'} = \frac{k}{\omega_v\sin\omega_v R\Theta}$. Führen wir ferner mit Hilfe des Helmholtzschen Satzes (39a) die Koordinate z in den Ausdruck für ω_{H_g} ein, so erhalten wir:

$$w_{H_g} = \frac{k(V-1)}{\omega_v\sin\omega_v R\Theta} + \frac{\sin\omega_v R\Theta+\omega_v\zeta\cos\omega_v R\Theta}{\omega_v V}\,.$$

Wie man sich leicht überzeugt, führt dies nach einer kurzen Zwischenrechnung zu dem in (41a) angegebenen Resultat. Da für die bildseitige Hauptebene die laterale Vergrößerung $V = +1$ sein muß, kann w_{H_b} auch direkt aus Gleichung (36a) bestimmt werden.

Setzt man die Beziehung $\frac{y}{y_0'} = \frac{k}{\omega_v\sin\omega_v R\Theta}$ in (42) ein, so erhält man die gegenstandsseitige Brennweite:

$$f_g = -\frac{1}{\omega_v\sin\omega_v R\Theta}\,. \quad (42a)$$

Weiter ist:

$$f_b = \frac{1}{\omega_v\sin\omega_v R\Theta}\,. \quad (43a)$$

Für s_g und s_b erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} s_g &= z + \frac{1}{\omega_v}\operatorname{cotg}\omega_v R\Theta\,,\\ s_b &= \frac{1}{\omega_v}\operatorname{cotg}\omega_v R\Theta - (\zeta-R\Theta)\,. \end{aligned}\right\} \quad (45a)$$

Damit können auch Bild- und Gegenstandsweite nach Gleichung (46) berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned} a &= z + \frac{1}{\omega_v\sin\omega_v R\Theta}(\cos\omega_v R\Theta-1)\,,\\ b &= \frac{1}{\omega_v\sin\omega_v R\Theta}(1+\cos\omega_v R\Theta) - (\zeta-R\Theta)\,. \end{aligned}\right\} \quad (46a)$$

Die reduzierte Dispersion ergibt sich nach Gleichung (49) mit Hilfe von (37a) und dem Helmholtzschen Satz zu:

$$D=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}=\frac{1}{\omega_v^2 RS}(1-\omega_v z\sin\omega_v R\Theta-\cos\omega_v R\Theta)=\frac{1}{\omega_v^2 RS}\frac{V-1}{V}. \tag{49a}$$

Sämtliche für das „abgehackte" Feld abgeleiteten Ergebnisse lassen sich in die von Herzog[12]) erhaltenen Resultate überführen, wenn wir uns auf die Herzogsche Feldanordnung spezialisieren, nämlich das elektrische Radialfeld eines in u-Richtung „unendlich langen" Zylinderkondensators und das homogene Magnetfeld. Der Feldkoeffizient H_2 verschwindet dann, während $\frac{E_2}{U_0}=-\frac{1}{2U_0}\cdot\frac{E_1}{R}$ wird, wie ein Vergleich der Reihen (4) und (2) zeigt. Da ferner nach (17) $\frac{E_1}{2U_0}=\frac{1}{R}$, so gilt $\frac{E_2}{U_0}=-\frac{1}{R^2}$ und wegen (18a) $\omega_v=\frac{2}{R^2}$. Damit erhalten wir z. B. für die bildseitige Brennweite $f_b=\frac{R}{\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\Theta}$. Herzog erhält $f_b=\frac{R}{\varkappa}\frac{1}{\sin\varkappa\Theta}$, wobei mit seinen Beziehungen $\varkappa^2=2\frac{R}{R_e}+\frac{R^2}{R_m^2}$. Um Geschwindigkeitsfokussierung zu erreichen, muß $\frac{R}{R_m}=2$ sein und wegen $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_e}+\frac{1}{R_m}$ folgt $\frac{R}{R_e}=-1$, so daß $\varkappa^2=2$ wird. Damit ist aber die Übereinstimmung beider Resultate schon gezeigt.

IV. Die Berechnung der Abbildungsfehler zweiter Ordnung

Durch die Gaußsche Dioptrik werden die Bahnen der Korpuskeln nur in erster Näherung wiedergegeben. Wird bei kleinen Gegenstands- und Bildkoordinaten durch einen hinreichend kleinen Blendenradius dafür gesorgt, daß nur Strahlenbündel geringer Öffnung in das Umlenkfeld eintreten können, so gibt die Gaußsche Näherung die bei der Abbildung auftretenden Gesetzmäßigkeiten genügend genau wieder. Da die Größe der Aperturblende die Lichtstärke der Apparatur bestimmt, ist die Einhaltung eines kleinen Blendenradius jedoch nicht immer möglich. Dies trifft wegen der meist geringen Häufigkeit der Isotope besonders für ein Spektralgerät zur Isotopentrennung zu. Arbeitet man daher mit einer größeren Blendenöffnung, so ergeben sich wegen der dadurch bedingten größeren Neigungswinkel der Bahnen gegen die optische Achse Abweichungen von der Gaußschen Dioptrik. Größere Beträge der Koordinaten, der Geschwindigkeits- und Massendispersion sind weitere Ursachen für einen von den Gaußschen Bahnen abweichenden Strahlengang. Zur Berechnung der Abweichungen in erster Näherung muß die Entwicklung der Bewegungsgleichungen einen Schritt weiter getrieben werden als in der Gaußschen Dioptrik, d. h. es müssen neben den Gliedern erster Ordnung auch noch diejenigen zweiter Ordnung berücksichtigt werden. Als Resultat dieser genaueren Rechnung erhält man die Fehler zweiter Ordnung.

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß es vernünftig ist, für die Funktionen E_n und H_n in den Räumen I und III einerseits und dem Raum II andererseits verschiedene Größenordnungen anzunehmen. Im Bild- und Gegenstandsraum konnten deshalb einige Terme als Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Ferner traten bei der Einführung der Geschwindigkeitsdispersion im Umlenkraum ebenfalls Glieder zweiter Ordnung auf. Diese Funktionen, welche für die Gaußsche Näherung belanglos waren, müssen jetzt berücksichtigt werden. Entwickeln wir die Bewegungsgleichungen (14) bis einschließlich zu Gliedern zweiter Ordnung, dann erhalten wir für Gegenstands- und Bildraum an Stelle der Differentialgleichungen (21) zwei Gleichungen, auf deren rechter Seite jetzt zwei Funktionen Q_u und Q_v erscheinen. Diese Funktionen lauten:

$$\left.\begin{aligned} Q_u&=-\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dw}\left(\frac{u'}{n}\right)-\beta\frac{d}{dw}\left(\frac{u'}{n}\right),\\ Q_v&=\frac{1}{4U_0}\left(V_0H_1-\frac{E_1}{n^3}\right)\gamma-\frac{E_1}{2U_0n^3}\beta-\frac{d}{dw}\left(\frac{v'}{n}\right)\cdot\frac{\gamma}{2}-\beta\frac{d}{dw}\left(\frac{v'}{n}\right)\cdot\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

12) R. Herzog a. a. O.

Die Entwicklung der Gleichungen (13) liefert mit den in (18) unberücksichtigt gebliebenen Termen für den Umlenkraum:

$$\left.\begin{aligned}
Q_u = &-\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dw}\left(\frac{u'}{n}\right)-\beta\frac{d}{dw}\left(\frac{u'}{n}\right)\\
&+\left\{\frac{1}{2U_0 n}\left[\frac{2}{R}(E_0''-E_2)-E_1''-6E_3\right]+\frac{2n}{R^3}+\frac{V_0}{2U_0 c}\left(\frac{H_2}{R}+2H_3\right)\right\}uv\\
&-\frac{V_0}{2U_0 c}H_1' uv'+\left[\frac{1}{4U_0 n^3}(E_0''+2E_2)+\frac{1}{2nR^2}-\frac{V_0}{4U_0 c}H_2\right]\gamma u\\
&+\left[\frac{1}{2U_0 n^3}(E_0''+2E_2)+\frac{1}{nR^2}\right]\beta u-\frac{n}{R}\left(\frac{E_1}{2U_0 n^2}-\frac{1}{R}\right)u;\\
Q_v = &-\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dw}\left(\frac{v'}{n}\right)-\beta\frac{d}{dw}\left(\frac{v'}{n}\right)+\left[\frac{3E_3}{2U_0 n}-\frac{V_0}{2U_0 c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]v^2\\
&+\left\{\frac{1}{2U_0 n}\left[\frac{1}{R}(E_0''-E_2)'-\frac{1}{2}E_1''-3E_3\right]+\frac{n}{R^3}+\frac{V_0}{4U_0 c}\left(H_1''+\frac{H_2}{R}+2H_3\right)\right\}u^2\\
&+\frac{V_0}{2U_0 c}H_1' uu'+\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{2n}+n\right)-\frac{E_2}{2U_0 n^3}+\frac{V_0}{4U_0 c}H_2\right]\gamma v+\frac{2}{n^3 R}\beta\gamma+\frac{2}{n^3 R}\beta^2\\
&+\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{3}{2}n\right)\gamma^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2R^2}-\frac{E_2}{U_0 n^2}\right)\beta v-\frac{1}{nR}\left(\frac{V_0}{2U_0 c}H_1-\frac{2n}{R}\right)v\\
&-\frac{1}{n}\left(\frac{E_1}{2U_0 n}-\frac{1}{R}\right)\beta-\frac{1}{n}\left[\left(\frac{E_1}{2U_0 n^3}-\frac{1}{R}\right)+\left(\frac{2n}{R}-\frac{V_0}{2U_0 c}H_1\right)\right]\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

Beschränken wir unsere Betrachtungen zunächst nicht auf einen bestimmten Raum, so können die korrigierten Bewegungsgleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dw}(nu')+\omega_u^2 u=Q_u,\\
&\frac{d}{dw}(nv')+\omega_v^2 v+F_1+F_2=Q_v
\end{aligned}\right\}\quad(53)$$

angeschrieben werden. F_2 ist bekanntlich im Gegenstands- und Bildraum Null; die Koordinaten u und v sind gegen die w-Achse gemessen. Ein Vergleich der Gleichung (53) mit den Gleichungen (21) zeigt, daß die zur Berechnung der optischen Achse genommenen Beziehungen (21) durch die Funktionen Q_u und Q_v „gestört" sind. Die „Störfunktionen" bedingen eine Korrektur der optischen Achse durch quadratische Glieder Δu_A und Δv_A, die Fehler zweiter Ordnung der optischen Achse. Da das in der u-Koordinate symmetrisch aufgebaute Umlenkfeld keine Fehler zweiter Ordnung in der u-Richtung zuläßt, muß $\Delta u_A = 0$ sein. Dies folgt auch rein formal aus den folgenden Rechnungen. In (53) bestehen die Koordinaten u und v offenbar aus der Summe der Gaußschen Achsenkoordinaten $u_A = 0$ und v_A, sowie den Korrekturgliedern Δu_A und Δv_A; es gilt also $u = \Delta u_A$, $v = v_A + \Delta v_A$. Da in Q_u und Q_v nur Glieder zweiter Ordnung auftreten, dürfen dort die Gaußschen Werte $u_A = 0$ und v_A eingesetzt werden, da eine Berücksichtigung von Δu_A und Δv_A Glieder dritter und höherer Ordnung zur Folge hätte. Wie aus den Gleichungen (51) und (53) folgt, verschwindet die Funktion Q_u für $u_A = 0$, so daß die Lösung der ersten (homogenen) Gleichung lautet $\Delta u_A = \Delta x_A u_1 + \Delta x_A' u_2$ wenn Δx_A und $\Delta x_A'$ den Fehler und seine Ableitung nach w in der Gegenstandsebene bedeuten. Da aber die optische Achse in der Gegenstandsebene fehlerfrei ist, verschwinden Δx_A und $\Delta x_A'$, woraus $\Delta u_A = 0$ folgt, wie oben behauptet wurde. Bezeichnen wir die Funktion Q_v nach Einführung der Achsenkoordinate v_A mit Q_{Av}, so lautet die zweite der Gleichungen (53):

$$\frac{d}{dw}(nv_A')+\omega_v^2 v_A+F_1+F_2+\frac{d}{dw}(n\Delta v_A')+\omega_v^2\Delta v_A=Q_{Av}.$$

Ein Vergleich mit (21) zeigt, daß die Summe der ersten vier Terme Null ist; zur Bestimmung der Abweichungen Δv_A erhalten wir daher die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dw}(n\Delta v_A')+\omega_v^2\Delta v_A=Q_{Av}.$$

Die allgemeine Lösung wird unter Benutzung der in der Umlenkebene verlaufenden Gaußschen Strahlen v_1 und v_2 mit der bereits ange-

wandten Methode der „Variation der Konstanten" gefunden. In der Bildebene beträgt die Abweichung $\Delta\eta_A$ der optischen Achse von ihrem Gaußschen Sollwert

$$\left.\begin{aligned}\Delta\eta_A = -\Bigg[&\frac{1}{n(-z)}\int_{-z}^{0} v_{I2}Q_{Av}\,dw + \frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{R\Theta} v_{II2}Q_{Av}\,dw\\ &+ \frac{1}{[v_{II1}(\Theta)v'_{II2}(\Theta) - v'_{II1}(\Theta)v_{II2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{\zeta} v_{III2}Q_{Av}\,dw\Bigg]V.\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Für das an erster und dritter Stelle stehende Integral sind die Funktionen Q_{Av} aus der Gleichung (51) zu entnehmen, während das über den Umlenkraum erstreckte Integral Q_{Av} aus (52) zu berechnen ist.

Wie es in der Optik allgemein üblich ist, wollen wir den durch die Gleichung (54) dargestellten Gesamtfehler in einzelne Fehlerarten aufteilen. Zu diesem Zweck führen wir mit Hilfe der Gleichungen (51) und (52) folgende Fehlerkoeffizienten ein, wobei die mit v_A veränderlichen Koeffizienten auf die Koordinate η_A der optischen Achse bezogen werden:

$$\left.\begin{aligned}
A_A &= -\frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{R\Theta} v_{II2}\left\{\left[\frac{3E_3}{2U_0 n} - \frac{V_0}{2U_0 c}\left(\frac{H_2}{R} + H_3\right)\right]\frac{v_A^2}{\eta_A^2}\,dw,\right.\\
B_A &= -\frac{1}{[v_{I1}(0)v_{I2}(0) - v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\cdot\frac{1}{2R}\int_{0}^{R\Theta} v_{II2}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{3}{2}n\right)dw,\\
C_A &= \frac{1}{2\,n(-z)}\int_{-z}^{0} v_{I2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_A}{\eta_A}\right)\cdot dw\\
&\quad - \frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{R\Theta} v_{II2}\left\{\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{2n} + n\right) - \frac{E_2}{2U_0 n^3} + \frac{V_0}{4U_0 c}H_2\right]\frac{v_A}{\eta_A}\right.\\
&\quad \left.- \frac{1}{2}\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_A}{\eta_A}\right)\right\}dw + \frac{1}{2[v_{II1}(\Theta)v'_{II2}(\Theta) - v'_{II1}(\Theta)v_{II2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{\zeta} v_{III2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_A}{\eta_A}\right)\cdot dw,\\
D_A &= -\frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\cdot\frac{2}{R}\int_{0}^{R\Theta} v_{II2}\frac{1}{n^3}\,dw,\\
G_A &= \frac{1}{n(-z)}\int_{-z}^{0} v_{I2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_A}{\eta_A}\right)\cdot dw\\
&\quad - \frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{R\Theta} v_{II2}\left\{\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{2R^2} - \frac{E_2}{U_0 n^3}\right)\frac{v_A}{\eta_A} - \frac{d}{dw}\left(\frac{v'_A}{\eta_A}\right)\right]\right\}dw,\\
&\quad + \frac{1}{[v_{II1}(\Theta)v'_{II2}(\Theta) - v'_{II1}(\Theta)v_{II2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{\zeta} v_{III2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_A}{\eta_A}\right)\cdot dw,\\
K_A &= \frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{R\Theta} v_{II2}\frac{1}{n}\left(\frac{V_0}{2U_0 c}H_1 - \frac{2n}{R}\right)\frac{v_A}{\eta_A}\,dw,
\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Fortsetzung von Gleichung (55).

$$
\left.
\begin{aligned}
L_A = &-\frac{1}{n(-z)}\int_{-z}^{0} v_{I2}\left(\frac{V_0}{4U_0c}H_1 - \frac{E_1}{4U_0n^3}\right)dw \\
&+\frac{1}{2\,[v_{I1}(0)v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{R\Theta} v_{II2}\,\frac{1}{n}\left[\left(\frac{E_1}{2U_0n^2} - \frac{1}{R}\right) + \left(\frac{2n}{R} - \frac{V_0}{2U_0c}H_1\right)\right]dw \\
&-\frac{1}{[v_{III}(\Theta)v'_{II2}(\Theta) - v'_{III}(\Theta)v_{II2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{\zeta} v_{III2}\left(\frac{V_0}{4U_0c}H_1 - \frac{E_1}{4U_0n^3}\right)dw, \\
N_A = &\frac{1}{n(-z)}\int_{-z}^{0} v_{I2}\,\frac{E_1}{2U_0n^3}\,dw + \frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{R\Theta} v_{II2}\,\frac{1}{n}\left(\frac{E_1}{2U_0n} - \frac{1}{R}\right)dw \\
&+\frac{1}{[v_{III}(\Theta)v'_{II2}(\Theta) - v'_{III}(\Theta)v_{II2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{\zeta} v_{III2}\,\frac{E_0}{2U_0n^3}\,dw.
\end{aligned}
\right\} \quad (55)
$$

Die Gesamtheit der einzelnen Fehler ist damit durch

$$
\begin{aligned}
\Delta\eta_A = (&A_A\eta_A^2 + B_A\gamma^2 + C_A\eta_A\gamma + D_A\beta^2 + G_A\eta_A\beta \\
&+ D_A\beta\gamma + K_A\eta_A + L_A\gamma + N_A\beta)\,V
\end{aligned}
$$

gegeben. Eine einfache Überlegung zeigt, daß es wieder gleichgültig ist, ob die Bildebene senkrecht zur optischen Achse oder senkrecht zur w-Achse angenommen wird.

Da η_A in erster Näherung proportional zu γ ist, bewirken die drei ersten Fehlerglieder eine zum Quadrat des Gaußschen Betrages proportionale Änderung der Achsenkoordinate in der Bildebene, d. h. die Achsenkoordinate wird „verzeichnet". Dabei ist die Verzeichnung einmal rein achsenbedingt, dann rein massebedingt und schließlich achsen- und massebedingt. Das nächste Korrekturglied zeigt Abhängigkeit der Achsenkoordinate von der Geschwindigkeitsdispersion der Ionen. Die Geschwindigkeitsfokussierung ist also in zweiter Näherung nicht mehr erfüllt. Da β von η_A unabhängig ist, kann dieser Fehleranteil als geschwindigkeitsbedingte Aberration bezeichnet werden. Die beiden letzten Glieder endlich können ihrer Entstehung nach als astigmatische Fehler gedeutet werden, da beide aus einem mit der Achsenkoordinate veränderlichen und einem davon unabhängigen Faktor bestehen. Im ersten Fall ist der Astigmatismus geschwindigkeits- und achsenbedingt, im anderen Fall geschwindigkeits- und massebedingt. Die an letzter Stelle notierten drei Fehler nehmen eine Sonderstellung ein. Bei gegebenem Kreisradius R und bekannter Voltgeschwindigkeit der Ionen sind bekanntlich die Feldstärken E_1 und H_1 nicht mehr frei wählbar. Zunächst muß E_1 so eingestellt werden, daß Geschwindigkeitsfokussierung herrscht; H_1 ist dann so einzuregeln, daß die Teilchen im Umlenkraum in der Nähe des Kreisbogens $\varrho = 0$ fliegen. Durch diese Forderungen sind aber nach Gleichung (17) die Feldstärken E_1 und H_1 nicht exakt, sondern nur bis auf Größen erster Ordnung (δ und E_1) bestimmt. Dieser Tatsache verdanken die Fehlerkoeffizienten K_A, L_A, N_A ihre Existenz. Diese Koeffizienten sind also selbst von erster Ordnung kleine Größen. Im übrigen können die drei Fehler als achsenbedingte Verzeichnung, massebedingte Verzeichnung und geschwindigkeitsbedingte Aberration bezeichnet werden.

Damit haben wir für die optische Achse folgende Einzelfehler gefunden:

1.	Achsenbedingte Verzeichnungen	$\Delta\eta_A = A_A\eta_A^2 V$ $\Delta\eta_A = K_A\eta_A V$
1.	Massebedingte Verzeichnungen	$\Delta\eta_A = B_A\gamma^2 V$ $\Delta\eta_A = L_A\gamma V$
3.	Masse- und achsenbedingte Verzeichnung	$\Delta\eta_A = C_A\gamma\eta_A V$
4.	Geschwindigkeitsbedingte Aberrationen	$\Delta\eta_A = D_A\beta^2 V$ $\Delta\eta_A = N_A\beta V$
5.	Geschwindigkeits- und achsenbedingter Astigmatismus	$\Delta\eta_A = G\beta\eta_A V$
6.	Geschwindigkeits- und massebedingter Astigmatismus	$\Delta\eta_A = D\beta\gamma V$

(56)

Die Verzeichnungsfehler 1, 2 und 3 verringern das Auflösungsvermögen der Apparatur nicht; sie bewirken lediglich eine Verzerrung der Massenskala, deren Einfluß auf das Meßergebnis durch eine geeignete Eichung vermieden werden kann. Die restlichen Fehler 4, 5 und 6 dagegen vermindern das Auflösungsvermögen; wegen der

in zweiter Näherung nicht mehr erfüllten Geschwindigkeitsfokussierung durchstößt die optische Achse die Bildebene nicht mehr in einem Punkt, sondern in einem kurzen Strich in v-Richtung, welcher um so länger wird, je mehr sich die zu messende Ionenmasse M von der Bezugsmasse M_0 unterscheidet, da die Korrekturglieder 5 und 6 mit η_A bzw. γ wachsen. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß bei kleiner Geschwindigkeitsdispersion der Ionenquelle eine Verringerung des Auflösungsvermögens durch die Achsenfehler nicht zu befürchten ist.

Nachdem die Fehler der optischen Achse bekannt sind, wenden wir uns der Berechnung der eigentlichen Abbildungsfehler zu.

In den Differentialgleichungen (32), welche die Grundlage der Gaußschen Dioptrik bilden, sind jetzt ebenfalls Störfunktionen vorhanden. Wie man sich leicht überlegen kann, treten an Stelle von (32) die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dw}(n u') + \omega_u^2 u &= Q_u\,, \\ \frac{d}{dw}(n v') + \omega_v^2 v &= Q_v - Q_{Av}\,. \end{aligned}\right\}$$

Die Koordinaten u und v sind in diesen Gleichungen von der korrigierten optischen Achse gezählt. Durch ähnliche Überlegungen, wie sie bei der Berechnung der Achsenfehler angestellt wurden, gelangt man zu den Bestimmungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dw}(n\Delta u') + \omega_u^2 \Delta u &= Q_u\,, \\ \frac{d}{dw}(n\Delta v') + \omega_v^2 \Delta v &= Q_v - Q_{Av}\,. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

für die Abbildungsfehler zweiter Ordnung Δu und Δv. In den Funktionen Q_u, Q_v und Q_{Av} dürfen wieder die Gaußschen Koordinaten u, v und v_A eingesetzt werden. Wirkt das Umlenkfeld als Zylinderlinse, so sind die u-Koordinaten der Spaltbilder und damit auch die Abweichungen Δu praktisch ohne Interesse. Dies trifft nicht mehr zu, wenn das Umlenkfeld eine Punktabbildung vermittelt. In diesem Fall kann die Berechnung des Korrekturgliedes Δu unter Berücksichtigung der Gleichung (34) in völlig analoger Weise zu Δv erfolgen. Die allgemeine Lösung der Gleichungen (57) lautet (vgl. Gleichung 54):

$$\left.\begin{aligned} \Delta\xi = &\left[\frac{1}{n(-z)}\int_{-z}^{0} u_{I1} Q_u\, dw + \frac{1}{[u_{I1}(0)\,u'_{I2}(0) - u'_{I1}(0)\,u_{I2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{R\Theta} u_{III1} Q_u\, dw\right. \\ &\left. + \frac{1}{[u_{III1}(\Theta)\,u'_{III2}(\Theta) - u'_{III1}(\Theta)\,u_{III2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{\xi} u_{III1} Q_u\, dw\right] u_{III2}(\zeta) \\ &- \left[\frac{1}{n(-z)}\int_{-z}^{0} u_{I2} Q_u\, dw + \frac{1}{[u_{I1}(0)\,u'_{I2}(0) - u'_{I1}(0)\,u_{I2}(0)]\,u(0)}\int_{0}^{R\Theta} u_{II2} Q_u\, dw\right. \\ &\left. + \frac{1}{[u_{III1}(\Theta)\,u'_{III2}(\Theta) - u'_{III1}(\Theta)\,u_{III2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{\xi} u_{III2} Q_u\, dw\right] u_{III1}(\zeta)\,; \\ \Delta\eta = &-\left[\frac{1}{n(-z)}\int_{-z}^{0} v_{I2}(Q_v - Q_{Av})\, dw + \frac{1}{[v_{I1}(0)\,v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)\,v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_{0}^{R\Theta} v_{II2}(Q_v - Q_{Av})\, dw\right. \\ &\left. + \frac{1}{[v_{III1}(\Theta)\,v'_{III2}(\Theta) - v'_{III1}(\Theta)\cdot v_{III2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{\xi} v_{III2}(Q_v - Q_{Av})\, dw\right]\cdot V\,. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Unter Berücksichtigung der für die Gaußschen Koordinaten u_0 und v_0 gültigen Beziehungen $u_0 = u$ und $v_0 = v - v_A$ folgt aus Gleichung (51) für die im Gegenstands- und Bildraum gültigen Funktionen Q_u und $Q_v - Q_{Av}$:

$$\left.\begin{aligned} Q_u &= -\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{u'_0}{n}\right) - \beta\frac{d}{dw}\left(\frac{u'_0}{n}\right), \\ Q_v - Q_{Av} &= -\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_0}{n}\right) - \beta\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_0}{n}\right). \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Ferner ergibt sich aus Gleichung (52) für den Umlenkraum:

$$
\left.\begin{aligned}
Q_u = &-\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dw}\left(\frac{u_G'}{n}\right)-\beta\frac{d}{dw}\left(\frac{u_G'}{n}\right)+\left\{\frac{1}{2U_0 n}\left[\frac{2}{R}(E_0''-E_2)-E_1''-6E_3\right]+\frac{2n}{R^3}\right.\\
&\left.+\frac{V_0}{2U_0 c}\left(\frac{H_2}{R}+2H_3\right)\right\}\cdot(u_G v_G+u_G v_A)-\frac{V_0}{2U_0 c}H_1'(u_G v_G'+u_G v_A')\\
&+\left[\frac{1}{4U_0 n^3}(E_0''+2E_2)+\frac{1}{2nR^2}-\frac{V_0}{4U_0 c}H_2\right]\gamma u_G+\left[\frac{1}{2U_0 n^3}(E_0''+2E_2)+\frac{1}{nR^2}\right]\beta u_G\\
&-\frac{1}{R}\left(\frac{E_1}{2U_0 n}-\frac{1}{R}\right)u_G,\\
Q_v - Q_{Av} = &-\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dw}\left(\frac{v_G'}{n}\right)-\beta\frac{d}{dw}\left(\frac{v_G'}{n}\right)+\left\{\frac{1}{2U_0 n}\left[\frac{1}{R}(E_0''-E_2)-\frac{E_1''}{2}-3E_3\right]+\frac{n}{R^3}\right.\\
&\left.+\frac{V_0}{4U_0 c}\left(H_1''+\frac{H_2}{R}+2H_3\right)\right\}u_G^2+\left[\frac{3E_3}{2U_0 n}-\frac{V_0}{2U_0 c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\cdot(v_G^2+2v_G v_A)\\
&+\frac{V_0}{2U_0 c}H_1' u_G u_G'+\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{2n}+n\right)-\frac{E_2}{2U_0 n^3}+\frac{V_0}{4U_0 c}H_2\right]\gamma v_G\\
&+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2R^2}-\frac{E_2}{U_0 n^2}\right)\beta v_G-\frac{1}{R}\left(\frac{V_0}{2U_0 c}H_1-\frac{2n}{R}\right)v_G.
\end{aligned}\right\}\quad(60)
$$

Eliminieren wir die Koordinaten u_G und v_G in den letzten beiden Beziehungen mit Hilfe der beiden Gleichungen (50), so erhalten wir die Abhängigkeit der Funktionen Q_u und $Q_v - Q_{Av}$ und somit auch die Fehler $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ von den Blenden- und Gegenstandskoordinaten. Damit kann der Gesamtfehler je nach der Abhängigkeit der einzelnen Terme von σ, x und y in mehrere Einzelfehler aufgeteilt werden. Da zunächst keine Punktabbildung vorausgesetzt ist, beschränken wir uns auf die Berechnung der Abweichungen $\Delta\eta$. Bevor wir diese notieren, führen wir mit Hilfe der Gleichungen (50), (59), (60) und (58) folgende Fehlerkoeffizienten ein; die mit v_A veränderlichen Koeffizienten werden wieder auf η_A bezogen:

$$
\left.\begin{aligned}
A_1 = &-\frac{1}{[v_{I1}(0)v_{I2}'(0)-v_{I1}'(0)v_{I2}(0)]n(0)}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\left[\left\{\frac{1}{2U_0 n}\left[\frac{1}{R}(E_0''-E_2)-\frac{E_1''}{2}-3E_3\right]+\frac{n}{R^3}\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{V_0}{4U_0 c}\left(H_1''+\frac{H_2}{R}+2H_3\right)\right\}\cdot\left(u_{II1}+\frac{u_{II2}}{M_g}\right)^2+\frac{V_0}{2U_0 c}H_1'\left(u_{II1}+\frac{u_{II2}}{M_g}\right)\left(u_{II1}'+\frac{u_{II2}'}{M_g}\right)\right]dw,\\
A_2 = &-\frac{1}{[v_{I1}(0)v_{I2}'(0)-v_{I1}'(0)v_{I2}(0)]n(0)}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\cdot\frac{1}{2U_0}\left[\frac{3E_3}{n}-V_0\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\left(v_{II1}+\frac{v_{II2}}{M_g}\right)^2 dw,\\
B = &-\frac{1}{[v_{I1}(0)v_{I2}'(0)-v_{I1}'(0)v_{I2}(0)]n(0)}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\cdot\frac{1}{U_0}\left[\frac{3E_3}{n}-V_0\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\left(v_{II1}+\frac{v_{II2}}{M_g}\right)\frac{v_{IIA}}{\eta_A}dw,\\
C = &\frac{1}{2n(-z)}\int_{-z}^{0}\left[v_{I2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v_{I1}'+\frac{v_{I2}'}{M_g}}{n}\right)\right]dw-\frac{1}{[v_{I1}(0)v_{I2}'(0)-v_{I1}'(0)v_{I2}(0)]n(0)}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\left\{\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{2n}+n\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{E_2}{2U_0 n^3}+\frac{V_0}{4U_0 c}H_2\right]\left(v_{II1}+\frac{v_{II2}}{M_g}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v_{II1}'+\frac{v_{II2}'}{M_g}}{n}\right)\right\}dw\\
&+\frac{1}{2[v_{III}(\Theta)v_{III2}'(\Theta)-v_{III}'(\Theta)v_{III2}(\Theta)]n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{\xi}\left[v_{III2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v_{III1}'+\frac{v_{III2}'}{M_g}}{n}\right)\right]dw,
\end{aligned}\right\}\quad(61)
$$

Fortsetzung von Gleichung (61).

$$
\begin{aligned}
D_1 = &-\frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0)-v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\left[\left\{\frac{1}{2U_0 n}\left[\frac{1}{R}(E''_0-E_2)-\frac{E''_1}{2}-3E_3\right]\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{n}{R^3}+\frac{V_0}{4U_0c}\left(H''_1+\frac{H_2}{R}+2H_3\right)\right\}\frac{u^2_{II2}}{M^2_g}+\frac{V_0}{2U_0c}H'_1\cdot\frac{u_{II2}u'_{II2}}{M^2_g}\right]dw,\\
D_2 = &-\frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0)-v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\frac{1}{2U_0}\left[\frac{3E_3}{n}-V_0\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\frac{v^2_{II2}}{M^2_g}dw,\\
G = &\frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0)-v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\frac{1}{U_0}\left[\frac{3E_3}{n}-V_0\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\frac{v_{II2}}{M_g}\cdot\frac{v_{IIA}}{\eta_A}dw,\\
K = &-\frac{1}{n(-z)}\cdot\frac{1}{2M_g}\int_{-z}^{0}\left[v_{I2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_{I2}}{n}\right)\right]dw\\
&+\frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0)-v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\cdot\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\left\{\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{2n}+n\right)-\frac{E_2}{2U_0n^3}+\frac{V_0}{4U_0c}H_2\right]v_{II2}\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_{II2}}{n}\right)\right\}dw-\frac{1}{[v_{II1}(\Theta)v'_{II2}(\Theta)-v'_{II1}(\Theta)v_{II2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\cdot\frac{1}{2M_g}\int_{R\Theta}^{\xi}\left[v_{III2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_{III2}}{n}\right)\right]dw,\\
L = &-\frac{1}{n(-z)}\cdot\frac{1}{M_g}\int_{-z}^{0}\left[v_{I2}\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_{I2}}{n}\right)\right]dw\\
&+\frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0)-v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\cdot\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2R^2}-\frac{E_2}{U_0n^2}\right)v_{II2}-\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_{II2}}{n}\right)\right]dw\\
&-\frac{1}{[v_{II1}(\Theta)v'_{II2}(\Theta)-v'_{II1}(\Theta)v_{II2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\cdot\frac{1}{M_g}\int_{R\Theta}^{\xi}\left[v_{III2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_{III}}{n}\right)\right]dw,\\
N_1 = &\frac{2}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0)-v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\left[\left\{\frac{1}{2U_0n}\left[\frac{1}{R}(E''_0-E_2)-\frac{E''_1}{2}-3E_3\right]\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{n}{R^3}+\frac{V_0}{4U_0c}\left(H''_1+\frac{H_2}{R}+2H_3\right)\right\}\cdot\left(u_{II1}+\frac{u_{II2}}{M_g}\right)\frac{u_{II2}}{M_g}\right.\\
&\left.+\frac{V_0}{4U_0c}H'_1\left[\left(u_{III}+\frac{u_{II2}}{M_g}\right)\frac{u'_{II2}}{M_g}+\left(u'_{II1}+\frac{u'_{II2}}{M_g}\right)\frac{u_{II2}}{M_g}\right]\right]dw,\\
N_2 = &\frac{2}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0)-v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\left\{\frac{1}{2U_0}\left[\frac{3E_3}{n}-V_0\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\cdot\left(v_{II1}+\frac{v_{II2}}{M_g}\right)\cdot\frac{v_{II2}}{M_g}\right\}dw,\\
P = &\frac{1}{n(-z)}\int_0^{R\Theta}\left[v_{I2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_{I1}+\frac{v'_{I2}}{M_g}}{n}\right)\right]dw\\
&-\frac{1}{[v_{I1}(0)v'_{I2}(0)-v'_{I1}(0)v_{I2}(0)]\,n(0)}\int_0^{R\Theta} v_{II2}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2R^2}-\frac{E_2}{U_0n^2}\right)\cdot\left(v_{II1}+\frac{v_{II2}}{M_g}\right)-\frac{d}{dw}\left(\frac{v_{II1}+\frac{v'_{II2}}{M_g}}{n}\right)\right]dw\\
&+\frac{1}{[v_{II1}(\Theta)v'_{II2}(\Theta)-v'_{II1}(\Theta)v_{II2}(\Theta)]\,n(\Theta)}\int_{R\Theta}^{\xi}\left[v_{III2}\cdot\frac{d}{dw}\left(\frac{v'_{III1}+\frac{v'_{III2}}{M_g}}{n}\right)\right]dw,
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Fortsetzung von Gleichung (61).

$$S = \frac{1}{[v_{I1}(0)\,v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)\,v_{I2}(0)]\,n(0)} \cdot \frac{1}{R} \int_0^{R\Theta} v_{II2} \left(\frac{V_0}{2U_0 c} H_1 - \frac{2n}{R} \right) \left(v_{II1} + \frac{v_{II2}}{M_g} \right) dw\,,$$

$$T = -\frac{1}{[v_{I1}(0)\,v'_{I2}(0) - v'_{I1}(0)\,v_{I2}(0)]\,n(0)} \cdot \frac{1}{R} \int_0^{R\Theta} v_{II2} \left(\frac{V_0}{2U_0 c} H_1 - \frac{2n}{R} \right) \frac{v_{II2}}{M_g}\, dw\,. \qquad (61)$$

Unter Benutzung der in (61) definierten Fehlerkoeffizienten lautet die Gesamtheit der Abbildungsfehler zweiter Ordnung:

$$\Delta\eta = (A_1 x^2 + A_2 y^2) \cdot V + B y \eta_A \cdot V + C y\gamma \cdot V + (D_1 \cos^2\alpha + D_2 \sin^2\alpha)\sigma^2 \cdot V + G\eta_A \sigma \cdot V \cdot \sin\alpha + K\gamma\sigma V \cdot \sin\alpha + L\beta\sigma V \cdot \sin\alpha + (N_1 x \cos\alpha + N_2 y \sin\alpha)\sigma \cdot V + P y\beta \cdot V + S y \cdot V + T\sigma V \cdot \sin\alpha\,.$$

Damit lassen sich die Abbildungsfehler für jedes der in der Bildebene vorhandenen, zu verschiedenen Massen gehörigen Spaltbilder berechnen. Greift man irgendeines der Bilder heraus, so sind γ und η_A in dem angeschriebenen Resultat konstant.

Die ersten drei Fehler sind leicht als Verzeichnungen zu erkennen, da bei ihnen eine von den Gegenstandskoordinaten abhängige Korrektur der Bildkoordinate auftritt. Der an erster Stelle notierte Fehler ist rein ortsbedingt, während von den beiden anderen Abweichungen die eine orts- und achsenbedingt und die andere orts- und massebedingt ist. Die nächsten vier Terme sind bei konstantem η_A bzw. γ nur von der Blendenöffnung abhängig, d. h. es handelt sich bei diesen Abweichungen um Aberrationen (Öffnungsfehler). Es existiert eine rein ortsbedingte Aberration, hierauf folgen orts- und achsenbedingte Aberration, orts- und massebedingte Aberration und schließlich orts- und geschwindigkeitsbedingte Aberration. Hierauf folgen zwei Korrekturglieder, die aus einem von der Gegenstandskoordinate abhängigen und einem davon unabhängigen Faktor bestehen. Wir können deshalb in beiden Fällen von Astigmatismus sprechen, wobei dieser einmal rein ortsbedingt ist, während er im anderen Fall orts- und geschwindigkeitsbedingt ist. Für die beiden letzten Fehler gilt das bei den Achsenfehlern K_A, L_A und N_A Gesagte. Sie kommen dadurch zustande, daß die Feldstärken E_1 und H_1 nicht exakt festgelegt sind. Die Koeffizienten S und T sind selbst Größen, die von erster Ordnung klein sind. Die Abweichungen können als ortsbedingte Verzeichnung und ortsbedingte Aberration bezeichnet werden.

Die Einzelfehler lauten also:

1. Ortsbedingte Verzeichnungen
$$\Delta\eta = (A_1 x^2 + A_2 y^2) \cdot V$$
$$\Delta\eta = S \cdot y \cdot V$$

2. Orts- und achsenbedingte Verzeichnungen
$$\Delta\eta = B y \eta_a V$$

3. Orts- und massebedingte Verzeichnung
$$\Delta\eta = C y\gamma V$$

4. Ortsbedingte Aberrationen
$$\Delta\eta = (D_1 \cos^2\alpha + D_2 \sin^2\alpha)\sigma^2 V$$
$$\Delta\eta = T\sigma V \cdot \sin\alpha$$

5. Orts- und achsenbedingte Aberration
$$\Delta\eta = G\eta_A \sigma V \cdot \sin\alpha$$

6. Orts- und massebedingte Aberration
$$\Delta\eta = K\gamma\sigma V \cdot \sin\alpha$$

7. Orts- und geschwindigkeitsbedingte Aberration
$$\Delta\eta = L\beta\sigma V \sin\alpha$$

8. Ortsbedingter Astigmatismus
$$\Delta\eta = (N_1 x \cos\alpha + N_2 y \sin\alpha)\sigma V$$

9. Orts- und geschwindigkeitsbedingter Astigmatismus
$$\Delta\eta = P\beta y V$$

(62)

Die störende Wirkung der einzelnen Abbildungsfehler auf das betrachtete Spaltbild ist sehr verschieden. Die Verzeichnungsfehler sind von der Größe des Blendenradius σ, also von der Querausdehnung des Ionenstrahlbündels unabhängig. Diese Fehler bewirken keine Verzerrung der einzelnen Bildpunkte des Spaltbildes, sondern sie äußern sich in einer Verzerrung seiner geometrischen Abmessungen. Die Auflösung des Gerätes wird von den Verzeichnungsfehlern nicht beeinflußt. Läßt man die Mitte des in der y-Richtung engen Spaltes mit dem Koordinatenursprung $x = 0$, $y = 0$ zusammenfallen, so treten nur kleine y-Werte auf und deshalb bleiben die Beträge der Fehler 2 und 3 sowie der von y bzw. y^2 abhängige Anteil der ortsbedingten Verzeichnung ebenfalls klein.

Die Aberrationen hängen von der Größe des Blendenradius σ, also von der Lichtstärke des Spektralgerätes ab und bedingen eine Verzerrung der einzelnen Bildpunkte. Da die Lichtstärke ein bestimmtes Mindestmaß nicht unterschreiten darf, vermindern die an Stelle der idealen Bildpunkte auftretenden Fehlerfiguren das Auflösungsvermögen des Spektrographen. Insbesondere trifft dies für die mit σ^3 veränderliche ortsbedingte Aberration zu, welche an allen Stellen der Bildebene gleich groß ist. Fällt die registrierte Ionenmasse nahezu mit der Bezugsmasse M_0 zusammen (kleine Beträge von γ und η_A), so sind die Aberrationen 5 und 6 bedeutungslos. Ebenso ist bei kleiner Geschwindigkeitsdispersion β der verwendeten Ionenquelle die Aberration 7 gering. Die astigmatischen Fehler haben ebenfalls eine Verzerrung der einzelnen Bildpunkte zur Folge und beeinträchtigen deshalb die Auflösung der Apparatur. Die Abhängigkeit von der Blendenöffnung ist allerdings nur linear; der von y abhängige Anteil kann durch kleine y-Werte gering gehalten werden. Dasselbe gilt für den Fehler 9, der außerdem noch durch eine kleine Geschwindigkeitsdispersion vermindert werden kann.

Um eine Abschätzung der Fehler zu ermöglichen, betrachten wir wie im Falle der Gaußschen Dioptrik ein „abgehacktes" Umlenkfeld. Die Voraussetzung für die Vernachlässigung der Streufelder ist natürlich wieder ein genügend großes Verhältnis der Bogenlänge $R\Theta$ zum Abstand der Elektroden und Polschuhe des Magneten. Daß unter diesen Umständen eine gute Abschätzung der Achsenfehler und insbesondere der Abbildungsfehler möglich ist, erkennen wir aus folgender Überlegung: Zunächst sind für die über den Umlenkraum erstreckten Integrale wegen des längeren Integrationsweges und der im Raum II größeren Zahlenwerte der Feldkoeffizienten E_2, E_3, H_2 und H_3 von vornherein größere Beträge zu erwarten als für die über die Streufelder erstreckten Integrale. Die Ungleichheit wird aber aus folgendem Grund noch vergrößert. Der Strahl v_2 kommt im Integranden sämtlicher bei der Berechnung der Achsenfehler auftretenden Integrale (55) vor. Dasselbe gilt von der Bahn u_2, v_2 und den zur Berechnung der Abbildungsfehler notwendigen Integralen (61), nur daß dort die Koordinaten u_2, v_2 mindestens quadratisch vorkommen. Da man sich leicht überlegen kann, daß die Koordinaten der genannten Strahlen gerade im Umlenkraum ihre größten Beträge besitzen, so ist die Vernachlässigung der Streufelder wohl gerechtfertigt.

Für das abgehackte Umlenkfeld sei wieder $E_0 = 0$, also $n = 1$. Ferner bewege sich das Teilchen der Masse M_0 längs des Kreisbogens $\varrho = 0$, was durch geeignete Wahl der Feldstärken immer erreicht werden kann; es gilt also $\frac{1}{R} = \frac{E_1}{2U_0} = \frac{V_0}{4U_0 c} H_1$. Die Achsenfehler mit den Koeffizienten K_A, L_A und N_A, sowie die Abbildungsfehler mit den Koeffizienten S und T verschwinden, weil die Feldstärken E_1 und H_1 im Gegensatz zu früher exakt festgelegt sind. Da die Feldstärkekoeffizienten E_2, E_3, H_2 und H_3 innerhalb des Umlenkraumes konstant sind und außerhalb desselben verschwinden, sind die über Gegenstands- und Bildraum erstreckten Integrale Null. Dagegen dürfen die Funktionen E_1', E_1'' und H_1'' nicht Null gesetzt werden, da sie an den Sprungstellen der Feldstärken E_1 und H_1, also bei den Koordinaten $w = 0$ und $w = R\Theta$ gegen Unendlich gehen und somit bei der Integration einen endlichen Beitrag liefern, wie wir weiter unten sehen werden. Die Gleichungen (55) und (61) lauten also:

$$
\left.
\begin{aligned}
A_A &= -\frac{1}{2U_0}\left[3E_3 - \frac{V_0}{c}\left(\frac{H_2}{R} + H_3\right)\right]\int_0^{R\Theta} v_2 \frac{v_A^2}{\eta_A^2}\, d(R\chi)\,,\\
B_A &= \frac{1}{4R}\int_0^{R\Theta} v_2\, d(R\chi)\,,\\
C_A &= -\left[\frac{3}{2R^2} - \frac{E_2}{2U_0} + \frac{V_0}{4U_0 c} H_2\right]\int_0^{R\Theta} v_2 \frac{v_A}{\eta_A}\, d(R\chi) + \frac{1}{2}\int_0^{R\Theta} v_2 \frac{v_A''}{\eta_A}\, d(R\chi)\,,\\
D_A &= -\frac{2}{R}\int_0^{R\Theta} v_2\, d(R\chi) = -8\, B_A\,,\\
G_A &= -\left(\frac{1}{2R^2} - \frac{E_2}{U_0}\right)\int_0^{R\Theta} v_2 \frac{v_A}{\eta_A}\, d(R\chi) + \int_0^{R\Theta} v_2 \frac{v_A''}{\eta_A}\, d(R\chi)\,.
\end{aligned}
\right\} \qquad (63)
$$

$$A_1 = -\left[\frac{1}{2U_0}\left(-\frac{E_2}{R}-3E_3\right)+\frac{1}{R^3}+\frac{V_0}{4U_0c}\left(\frac{H_2}{R}+2H_3\right)\right]\int_0^{R\Theta} v_2\left(u_1+\frac{u_2}{M_g}\right)^2 d(R\chi)$$
$$-\frac{1}{4U_0}\int_0^{R\Theta}\left(-E_1''+\frac{V_0}{c}H_1''\right)v_2\left(u_1+\frac{u_2}{M_g}\right)^2 d(R\chi)-\frac{V_0}{4U_0c}\int_0^{R\Theta} H_1' v_2\left(u_1+\frac{u_2}{M_g}\right)\left(u_1'+\frac{u_2'}{M_g}\right)d(R\chi),$$

$$A_2 = -\frac{1}{2U_0}\left[3E_3-\frac{V_0}{c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\int_0^{R\Theta} v_2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)^2 d(R\chi),$$

$$B = -\frac{1}{U_0}\left[3E_3-\frac{V_0}{c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\int_0^{R\Theta} v_2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)\frac{v_A}{\eta_A}d(R\chi),$$

$$C = -\left(\frac{3}{2R^2}-\frac{E_2}{2U_0}+\frac{V_0}{4U_0c}H_2\right)\int_0^{R\Theta} v_2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)d(R\chi)+\frac{1}{2}\int_0^{R\Theta} v_2\left(v_1''+\frac{v_2''}{M_g}\right)d(R\chi),$$

$$D_1 = -\left[\frac{1}{2U_0}\left(-\frac{E_2}{R}-3E_3\right)+\frac{1}{R^3}+\frac{V_0}{4U_0c}\left(\frac{H_2}{R}+2H_3\right)\right]\frac{1}{M_g^2}\int_0^{R\Theta} v_2 u_2^2 d(R\chi)$$
$$-\frac{1}{4U_0}\frac{1}{M_g^2}\int_0^{R\Theta}\left(-E_1''+\frac{V_0}{c}H_1''\right)v_2 u_2^2 d(R\chi)-\frac{V_0}{2U_0c}\frac{1}{M_g^2}\int_0^{R\Theta} H_1' v_2 u_2 u_2' d(R\chi),$$

$$D_2 = -\frac{1}{2U_0}\left[3E_3-\frac{V_0}{c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\frac{1}{M_g^2}\int_0^{R\Theta} v_2^2 d(R\chi),$$

$$G = \frac{1}{U_0}\left[3E_3-\frac{V_0}{c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2^2\frac{v_A}{\eta_A}d(R\chi),$$

$$K = \left(\frac{3}{2R^2}-\frac{E_2}{2U_0}+\frac{V_0}{4U_0c}H_2\right)\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2^2\, d(R\chi)-\frac{1}{2M_g}\int_0^{R\Theta} v_2 v_2''\, d(R\chi),$$

$$L = \left(\frac{1}{2R^2}-\frac{E_2}{U_0}\right)\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2^2 d(R\chi)-\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2 v_2''\, d(R\chi),$$

$$N_1 = \left[\frac{1}{U_0}\left(-\frac{E_2}{R}-3E_3\right)+\frac{1}{R^3}+\frac{V_0}{2U_0c}\left(\frac{H_2}{R}+2H_3\right)\right]\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2 u_2\left(u_1+\frac{u_2}{M_g}\right)d(R\chi)$$
$$+\frac{1}{2U_0}\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta}\left(-E_1''+\frac{V_0}{c}H_1''\right)v_2 u_2\left(u_1+\frac{u_2}{M_g}\right)d(R\chi)$$
$$+\frac{V_0}{2U_0c}\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} H_1'\left[\left(u_1+\frac{u_2}{M_g}\right)u_2'+\left(u_1'+\frac{u_2'}{M_g}\right)u_2\right]v_2 d(R\chi),$$

$$N_2 = \frac{1}{U_0}\left[3E_3-\frac{V_0}{c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2^2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)d(R\chi),$$

$$P = -\left(\frac{1}{2R^2}-\frac{E_2}{U_0}\right)\int_0^{R\Theta} v_2\left[\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)-\left(v_1''+\frac{v_2''}{M_g}\right)\right]d(R\chi).$$

(64)

Die Bahnen u_1, v_1 und u_2, v_2, sowie die optische Achse v_A sind aus den Gleichungen (22a) und (29a) zu entnehmen. Der Wert derjenigen Integrale, die über die Unendlichkeitsstellen der Integrale E_1', E_1'' und H_1' zu berechnen sind, kann durch einmalige bzw. zweimalige partielle Integration gefunden werden. Da E_1 und H_1 außerhalb des Umlenkraumes verschwinden, gilt z. B. (Fehlerkoeffizient D_1):

$$\frac{V_0}{2U_0c}\cdot\frac{1}{M_\vartheta^2}\int_0^{R\Theta} H_1' v_2 u_2 u_2' d(R\chi) = -\frac{2}{R\cdot M_\vartheta^2}\Big[v_2 u_2 u_2'\Big]_0^{R\Theta},$$

$$\frac{1}{4U_0}\cdot\frac{1}{M_\vartheta^2}\int_0^{R\Theta}\left(-E_1''+\frac{V_0}{c}H_1''\right)v_2 u^2 d(R\chi) = \frac{1}{M_\vartheta^2}\left(-\frac{1}{2R}+\frac{1}{R}\right)\cdot\left[\frac{d}{d(R\chi)}(v_2 u_2^2)\right]_0^{R\Theta}.$$

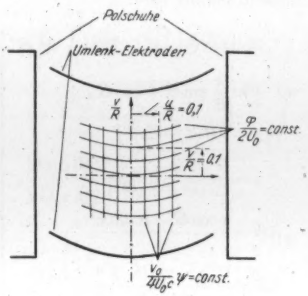


Fig. 7a.

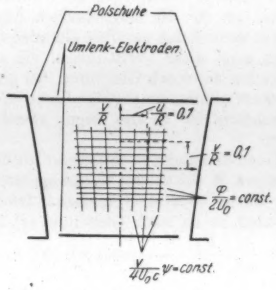


Fig. 7b.

Zwei Beispiele für das punktweise abbildende elektromagnetische Umlenkfeld. Beide Abbildungen zeigen die elektrischen und magnetischen Niveaulinien in einer Ebene $w = \text{const}$. In der linken Figur ist das Magnetfeld homogen; die elektrischen Potentiallinien sind Parabeln. Die rechte Abbildung zeigt das elektrische Feld des Zylinderkondensators; die magnetischen Niveaulinien sind Hyperbeln.

Sämtliche Fehlerkoeffizienten sind damit elementar zu berechnen. Da jedoch die erhaltenen Resultate sehr undurchsichtig sind und deshalb die Abhängigkeit der Abbildungsfehler von den Bestimmungsgrößen des Umlenkfeldes nur sehr schwer zu erkennen ist, verzichten wir darauf, das Resultat anzuschreiben.

Bei den durch (61), (62) und (63) gegebenen Fehlerkoeffizienten erkennt man, daß diese mit den Feldkoeffizienten E_2, E_3, H_2 und H_3 stark veränderlich sind. Es soll deshalb Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein, inwieweit diese Abhängigkeit dazu benutzt werden kann, besonders störende Fehler klein zu halten.

V. Die Punktabbildung

Wird das Umlenkfeld so ausgebildet, daß es in der Gaußschen Näherung eine stigmatische Abbildung der Gegenstandsebene auf die Bildebene vermittelt, so erhalten wir für jede Masse ein allseitig scharf begrenztes Bild des Spaltes. Für die Massenspektrographie bringt dies neben einem Gewinn an Intensität den Vorteil einer genaueren Einstellmöglichkeit des Spaltbildes mit sich, wodurch eine exaktere Auswertung der Massenspektren möglich erscheint.

Spezialisieren wir uns auf das „abgehackte Umlenkfeld", so gilt nach den Gleichungen (34) und (18) für das punktabbildende Feld:

$$\left.\begin{aligned}\omega_u = \omega_r &= \frac{1}{R},\\ \frac{V_0}{2U_0c}H_2 - \frac{E_2}{U_0} &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Das Verhältnis der beiden Feldkoeffizienten ist damit vorgegeben, jedoch ist über die absolute Größe von E_2 und H_2 nichts ausgesagt. Wir können deshalb zur Erreichung der Punktabbildung auch ein homogenes Magnetfeld, für

welches $H_2 = 0$ gilt, benutzen. Wegen (65) ist dann E_2 ebenfalls Null und nach Gleichung (2) gilt für das punktabbildende Umlenkfeld:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi}{2U_0} &= \frac{v}{R} - \frac{u^2}{R^2}, \\ -\frac{V_0}{4U_0 c}\psi &= \frac{u}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Für konstante Werte der Potentiale φ und ψ lassen sich aus diesen beiden Gleichungen die Äquipotentiallinien in einer zwischen den beiden Trennebenen befindlichen Ebene $w = \text{const.}$ angeben. Die elektrischen Niveaulinien sind Parabeln, deren Scheitel auf der v-Achse liegen, während wir für die magnetischen Äquipotentiallinien zur v-Achse parallele Geraden erhalten. Fig. 7a zeigt diese Verhältnisse; die zur Verwirklichung der durch Gleichung (66) gegebenen Äquipotentiallinien notwendige Elektroden- bzw. Polschuhform ist in der Figur ebenfalls angegeben.

Will man ein möglichst einfaches elektrisches Feld, also z. B. das bei der Massenspektrographie immer wieder benutzte Zylinderkondensatorfeld verwenden, so ist nach Gleichung (4) und (17) $\frac{E_2}{U_0} = -\frac{1}{2U_0}\cdot\frac{E_1}{R} = -\frac{1}{R^2}$ und aus (65) folgt dann $\frac{V_0}{2U_0 c}H_2 = -\frac{1}{R^2}$. Für die Niveaulinien liefert Gleichung (2) die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi}{2U_0} &= \frac{v}{R} - \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{R^2}, \\ -\frac{V_0}{4U_0 c}\psi &= \frac{u}{R} - \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{R}\cdot\frac{v}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Die Äquipotentiallinien des elektrischen Feldes verlaufen parallel zur u-Achse (Zylinderkondensator), während sich für das Magnetfeld Hyperbeln ergeben. In Fig. 7b sind beide Felder und die zu ihrer Verwirklichung notwendigen Elektroden bzw. Polschuhe angegeben. Die beiden gezeigten Beispiele können als Grenzfälle (einfaches Magnetfeld im ersten Fall und einfaches elektrisches Feld im zweiten Fall) aufgefaßt werden.

Setzen wir in den Gleichungen (36a) bis (49a) $\omega_u = \omega_v = \frac{1}{R}$, so erhalten wir die Gaußschen Bestimmungsgrößen für den Fall der stigmatischen Abbildung, von denen die wichtigsten anschließend notiert sind:

$$\left.\begin{aligned} V &= \cos\Theta - (\zeta - R\Theta)\frac{1}{R}\sin\Theta, \\ k &= \frac{z}{R}\sin\Theta + \cos\Theta, \\ \eta_A &= \gamma R(1 - V), \\ z &= \frac{R\sin\Theta + (\zeta - R\Theta)\cos\Theta}{V}, \\ \zeta - R\Theta &= \frac{z\cos\Theta - R\sin\Theta}{k}, \\ D &= \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{R}{S}\cdot\frac{V-1}{V}. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Zur Berechnung der Achsenfehler und der Abbildungsfehler dienen die in Gleichung (64) notierten Fehlerkoeffizienten, die sich unter Berücksichtigung der beiden Gleichungen (65) noch vereinfachen. Da $\omega_u = \omega_v$ gilt, ist nach (22a) $u_1 = v_1$ und $u_2 = v_2$, so daß bei der Berechnung der Fehlerkoeffizienten nur die in der Umlenkebene verlaufenden Strahlen v_1 und v_2 interessieren. Es gilt:

$$\left.\begin{aligned} A_A &= -\frac{1}{2U_0}\left[3E_3 - V_0\left(\frac{H_2}{R} + H_3\right)\right]\int_0^{R\Theta} v_2\frac{v_A^2}{\eta_A^2}\,d(R\chi), \\ B_A &= \frac{1}{4R}\int_0^{R\Theta} v_2\,d(R\chi), \\ C_A &= -\frac{3}{2R^2}\int_0^{R\Theta} v_2\frac{v_A}{\eta_A}\,d(R\chi) + \frac{1}{2}\int_0^{R\Theta} v_2\frac{v_A'}{\eta_A}\,d(R\chi), \\ D_A &= -\frac{2}{R}\int_0^{R\Theta} v_2\,d(R\chi) = -8B_A, \\ G_A &= -\left(\frac{1}{2R^2} - \frac{E_2}{U_0}\right)\int_0^{R\Theta} v_2\cdot\frac{v_A}{\eta_A}\,d(R\chi) + \int_0^{R\Theta} v_2\frac{v_A''}{\eta_A}\,d(R\chi), \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

$$A_1 = -\left(-\frac{3E_3}{2U_0}+\frac{V_0}{2U_0c}H_3+\frac{1}{R^3}\right)\int_0^{R\Theta} v_2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)^2 d(R\chi)$$
$$-\int_0^{R\Theta}\left(-\frac{E_1''}{4U_0}+\frac{V_0}{4U_0c}H_1''\right)\cdot v_2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)^2 d(R\chi)-\frac{V_0}{2U_0c}\int_0^{R\Theta} H_1'\cdot v_2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)\left(v_1'+\frac{v_2'}{M_g}\right)d(R\chi),$$

$$A_2 = -\frac{1}{2U_0}\left[3E_3-\frac{V_0}{c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\int_0^{R\Theta} v_2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)^2 d(R\chi),$$

$$B = -\frac{1}{U_0}\left[3E_3-\frac{V_0}{c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\int_0^{R\Theta} v_2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)\frac{v_A}{\eta_A}d(R\chi),$$

$$C = -\frac{3}{2R^2}\int_0^{R\Theta} v_2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)d(R\chi)+\frac{1}{2}\int_0^{R\Theta} v_2\left(v_1''+\frac{v_2''}{M_g}\right)d(R\chi),$$

$$D_1 = -\left(-\frac{3E_3}{2U_0}+\frac{V_0}{2U_0c}H_3+\frac{1}{R^2}\right)\cdot\frac{1}{M_g^2}\int_0^{R\Theta} v_2^3 d(R\chi)-\frac{1}{M_g^2}\int_0^{R\Theta}\left(-\frac{E_1''}{4U_0}+\frac{V_0}{4U_0c}H_1''\right)v_2^3 d(R\chi)$$
$$-\frac{V_0}{2U_0c}\frac{1}{M_g^2}\int_0^{R\Theta} H_1' v_2^2 v_2' d(R\chi),$$

$$D_2 = -\frac{1}{2U_0}\left[3E_3-\frac{V_0}{c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2^3 d(R\chi),$$

$$G = \frac{1}{U_0}\left[3E_3-\frac{V_0}{c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2^2\cdot\frac{v_A}{\eta_A}d(R\chi),$$

$$K = \frac{3}{2R^2}\cdot\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2^2 d(R\chi)-\frac{1}{2M_g}\int_0^{R\Theta} v_2 v_2'' d(R\chi),$$

$$L = \left(\frac{1}{2R^2}-\frac{E_2}{U_0}\right)\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2^2 d(R\chi)-\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2 v_2'' d(R\chi),$$

$$N_1 = \left(-\frac{3E_3}{2U_0}+\frac{V_0}{2U_0c}H_3+\frac{1}{R^3}\right)\frac{2}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2^2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)d(R\chi)$$
$$+\frac{2}{M_g}\int_0^{R\Theta}\left(-\frac{E_1''}{4U_0}+\frac{V_0}{4U_0c}H_1''\right)v_2^2\cdot\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)d(R\chi)$$
$$+\frac{V_0}{2U_0c}\cdot\frac{1}{M_g}\int_0^{R\Theta} H_1' v_2\left[\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)v_2'+\left(v_1'+\frac{v_2'}{M_g}\right)v_2\right]d(R\chi),$$

$$N_2 = \frac{1}{2U_0}\left[3E_3-\frac{V_0}{c}\left(\frac{H_2}{R}+H_3\right)\right]\cdot\frac{2}{M_g}\int_0^{R\Theta} v_2^2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)d(R\chi),$$

$$P = -\left(\frac{1}{2R^2}-\frac{E_2}{U_0}\right)\int_0^{R\Theta} v_2\left(v_1+\frac{v_2}{M_g}\right)d(R\chi)+\int_0^{R\Theta} v_2\left(v_1''+\frac{v_2''}{M_g}\right)d(R\chi).$$

(69)

Bei der Berechnung der Abbildungsfehler interessieren jetzt neben den Abweichungen $\Delta\eta$ auch die Fehler $\Delta\xi$, um das Aussehen der an Stelle des idealen Punktes auftretenden Fehlerfigur bzw. die Verformung des Spaltbildes angeben zu können. Da $u_1(\zeta) = v_1(\zeta) = V$ und $u_2(\zeta) = v_2(\zeta) = 0$, unterscheiden sich die in (58) für $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ angegebenen Ausdrücke nur noch durch die Funktionen Q_u und $Q_v - Q_{A\,v}$. Aus der in Gleichung (52) angeschriebenen Funktion Q_u lassen sich für die Abweichungen $\Delta\xi$ folgende Fehlerkoeffizienten gewinnen, wenn für die Gaußschen Strahlen u und v die durch Gleichung (50) gegebenen Funktionen eingesetzt werden.

$$A' = -\left(-\frac{3E_3}{U_0} + \frac{V_0}{U_0 c} H_3 + \frac{2}{R^3}\right) \int_0^{R\Theta} v_2 \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right)^2 d(R\chi) + \frac{1}{2U_0} \int_0^{R\Theta} E_1'' \cdot v_2 \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right)^2 d(R\chi)$$
$$+ \frac{V_0}{2U_0 c} \int_0^{R\Theta} H_1' v_2 \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right)\left(v_1' + \frac{v_2'}{M_g}\right) d(R\chi),$$

$$B' = -\left(-\frac{3E_3}{U_0} + \frac{V_0}{U_0 c} H_3 + \frac{2}{R^3}\right) \int_0^{R\Theta} v_2 \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right) \frac{v_A}{\eta_A} d(R\chi) + \frac{1}{2U_0} \int_0^{R\Theta} E_1'' v_2 \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right) \frac{v_A}{\eta_A} d(R\chi)$$
$$+ \frac{V_0}{2U_0 c} \int_0^{R\Theta} H_1' v_2 \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right) \frac{v_A'}{\eta_A} d(R\chi),$$

$$C' = -\frac{1}{2R^2} \int_0^{R\Theta} v_2 \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right) d(R\chi) + \frac{1}{2} \int_0^{R\Theta} v_2 \left(v_1'' + \frac{v_2''}{M_g}\right) d(R\chi),$$

$$D' = -\left(-\frac{3E_3}{U_0} + \frac{V_0}{U_0 c} H_3 + \frac{2}{R^3}\right) \frac{1}{M_g} \int_0^{R\Theta} v_2^2 d(R\chi) + \frac{1}{2U_0} \cdot \frac{1}{M_g^2} \int_0^{R\Theta} E_1'' v_2^3 d(R\chi)$$
$$+ \frac{V_0}{2U_0 c} \frac{1}{M_g} \int_0^{R\Theta} H_1' v_2^2 v_2' d(R\chi),$$

$$G' = \left(-\frac{3E_3}{U_0} + \frac{V_0}{U_0 c} H_3 + \frac{2}{R^3}\right) \frac{1}{M_g} \int_0^{R\Theta} v_2^2 \frac{v_A}{\eta_A} d(R\chi) - \frac{1}{2U_0} \cdot \frac{1}{M_g} \int_0^{R\Theta} E_1'' v_2^2 \frac{v_A}{\eta_A} d(R\chi) \qquad (70)$$
$$- \frac{V_0}{2U_0 c} \frac{1}{M_g} \int_0^{R\Theta} H_1' v_2^2 \frac{v_A'}{\eta_A} d(R\chi),$$

$$K' = \frac{1}{2R^2} \cdot \frac{1}{M_g} \int_0^{R\Theta} v_2^2 d(R\chi) - \frac{1}{2M_g} \int_0^{R\Theta} v_2 v_2'' d(R\chi),$$

$$L' = \left(\frac{E_2}{U_0} + \frac{1}{R^2}\right) \frac{1}{M_g} \int_0^{R\Theta} v_2^2 d(R\chi) - \frac{1}{M_g} \int_0^{R\Theta} v_2 v_2'' d(R\chi),$$

$$N' = \left(-\frac{3E_0}{U_3} + \frac{V_0}{U_0 c} H_3 + \frac{2}{R^3}\right) \frac{1}{M_g} \int_0^{R\Theta} v_2^2 \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right) d(R\chi) - \frac{1}{2U_0} \cdot \frac{1}{M_g} \int_0^{R\Theta} E_1'' v_2^2 \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right) d(R\chi)$$
$$- \frac{V_0}{2U_0 c} \cdot \frac{1}{M_g} \int_0^{R\Theta} H_1' v_2 v_2' \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right) d(R\chi),$$

$$P' = -\left(\frac{E_2}{U_0} + \frac{1}{R^2}\right) \int_0^{R\Theta} v_2 \left(v_1 + \frac{v_2}{M_g}\right) d(R\chi) + \int_0^{R\Theta} v_1 \left(v_1'' + \frac{v_2''}{M_g}\right) d(R\chi).$$

Sämtliche Integrale können wiederum elementar berechnet werden. Dort wo die Funktionen E_1' bzw. H_1' im Integranden auftreten, sind die weiter oben angegebenen partiellen Integrationen anzuwenden. Dabei zeigt sich, daß $D' = 2D$ und $N' = N$ gilt. Für das punktabbildende Umlenkfeld können damit die Abbildungsfehler in folgender Form angeschrieben werden[13]):

1. Ortsbedingte Verzeichnung:
$$\Delta\xi = A' x y \cdot V,$$
$$\Delta\eta = (A_1 x^2 + A_2 y^2) V.$$
2. Orts- und achsenbedingte Verzeichnung:
$$\Delta\xi = B' x \eta_A \cdot V,$$
$$\Delta\eta = B y \eta_A \cdot V.$$
3. Orts- und massebedingte Verzeichnung:
$$\Delta\xi = C' x \gamma \cdot V,$$
$$\Delta\eta = C y \gamma \cdot V.$$
4. Ortsbedingte Aberration:
$$\Delta\xi = D_1 \sigma^2 \sin 2\alpha \cdot V,$$
$$\Delta\eta = (D_1 \cos^2\alpha + D_2 \sin^2\alpha)\sigma^2 \cdot V.$$
5. Orts- und achsenbedingte Aberration:
$$\Delta\xi = G' \eta_A \sigma \cos\alpha \cdot V,$$
$$\Delta\eta = G \eta_A \sigma \sin\alpha \cdot V.$$
6. Orts- und massebedingte Aberration:
$$\Delta\xi = K' \gamma \sigma \cos\alpha \cdot V,$$
$$\Delta\eta = K \gamma \sigma \sin\alpha \cdot V.$$
7. Orts- und geschwindigkeitsbedingte Aberration:
$$\Delta\xi = L' \beta \sigma \cos\alpha \cdot V,$$
$$\Delta\eta = L \beta \sigma \sin\alpha \cdot V;$$
8. Ortsbedingter Astigmatismus:
$$\Delta\xi = (N_1 x \sin\alpha + N_1 y \cos\alpha)\sigma \cdot V,$$
$$\Delta\eta = (N_1 x \cos\alpha + N_2 y \sin\alpha)\sigma \cdot V.$$
9. Orts- und geschwindigkeitsbedingter Astigmatismus:
$$\Delta\xi = P' \beta x \cdot V,$$
$$\Delta\eta = P \beta y \cdot V.$$

(71)

Wir wollen nun die einzelnen Fehler diskutieren. Dabei ist zu den Achsenfehlern nichts mehr zu sagen. Ihre Wirkung und ihr Aussehen sind anschließend an die Formeln (56) behandelt. Die grundsätzlichen Eigenschaften der Abbildungsfehler sind ebenfalls aufgezählt, so daß wir uns hier nur mit ihrem Aussehen zu beschäftigen brauchen.

Um den Einfluß der einzelnen Fehlerkoeffizienten bei den Abbildungsfehlern zu erkennen, setzen wir alle bis auf den betreffenden Null. Wir beginnen mit der ortsbedingten Verzeichnung und betrachten hierzu Fig. 8. Das Teilbild 8a zeigt eine an Stelle des Spaltes gedachte Testfigur, wie sie bei fehlerfreier Abbildung aussehen würde. Das Koordinatennetz aus äquidistanten senkrechten und waagerechten Strichen deutet die geometrische Ähnlichkeit des Bildes mit dem Gegenstand an. Verschwinden alle Fehlerkoeffizienten bis auf A_2, so entsteht eine Verzerrung, wie sie im Teilbild 8b dargestellt

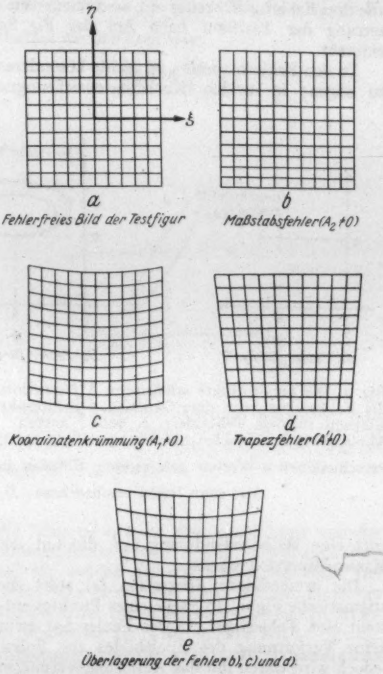


Fig. 8. Die ortsbedingte Verzeichnung. Entsprechend der Symmetrieebene des Umlenkfeldes sind alle Bilder in ξ-Richtung symmetrisch und in η-Richtung asymmetrisch. Die Koeffizenten A_1, A_2 und A' würden positiv angenommen. Für negative Werte ergeben sich entsprechende Veränderungen.

13) Es erübrigt sich auch, die Achsenfehler nochmals anzuschreiben. Sie können aus (56) mit den in (6) angegebenen Fehlerkoeffizienten berechnet werden.

ist. Dieser Fehler wird als Maßstabsfehler bezeichnet[14]). Sind alle Koeffizienten bis auf A_1 Null, so werden die waagerechten Netzgeraden gekrümmt, weshalb man den Fehler als Koordinatenkrümmung bezeichnet (Fig. 8c). Verschwinden außer A' alle Koeffizienten, so nimmt das Bild der Testfigur Trapezgestalt an; man bezeichnet daher den Fehler als Trapezfehler (Fig. 8d). Im allgemeinen treten alle drei Fehler gleichzeitig auf, so daß eine Verzerrung der Testfigur nach Art der Fig. 8e entsteht.

Zu den Fehlern 2 und 3 ist nichts besonderes zu sagen; in beiden Koordinatenrichtungen welche das Teilbild 9b zeigt. Für den Fall, daß keiner der beiden Fehlerkoeffizienten verschwindet, ergibt sich als resultierende Fehlerfigur die Ellipse

$$\Delta\xi = D_1\sigma^3 \sin 2\alpha \cdot V,$$
$$\Delta\eta = (D_1\cos^2\alpha + D_2\sin^2\alpha)\sigma^2 V = \tfrac{1}{2}(D_1 + D_2)\sigma^2 V + \tfrac{1}{2}(D_1 - D_2)\sigma^2 \cos 2\alpha \cdot V,$$

die in dem Teilbild 9c dargestellt ist. Diese Fehlerfiguren sind an sämtlichen Stellen der Bildebene gleich groß.

Durch die Fehler 5, 6 und 7 entstehen Ellipsen, deren Mittelpunkte mit dem Gaußschen

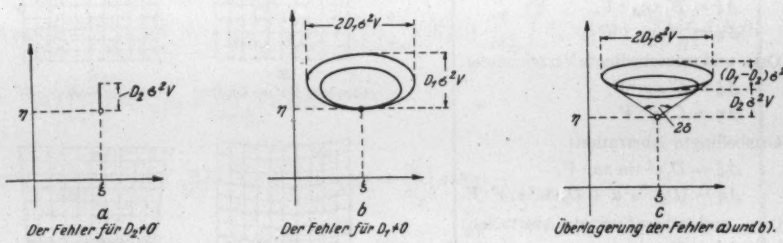


Fig. 9. Die ortsbedingte sphärische Abberration. Bei kleiner werdendem Blendenradius σ wandert die Fehlerfigur nach dem Gaußschen Bildpunkt mit den Koordinaten ξ, η, wie die beiden kleineren Ellipsen in den Teilbildern *b* und *c* zeigen. Bei der resultierenden Fehlerfigur (*c*) (diese hat Ähnlichkeit mit dem bei Abbildungsfehlern dritter Ordnung auftretenden Komafehler) liegen die zu verschiedenen σ-Werten gehörenden Ellipsen innerhalb des Winkels 2δ, wobei $\operatorname{tg}\delta = \frac{2D_1}{D_2 + D_1}$ gilt, wie man leicht nachrechnet. D_1 und D_2 sind positiv angenommen.

tritt eine Maßstabsänderung auf, die mit der Massendispersion wächst.

Die ortsbedingte Aberration (4) stört die stigmatische Figur; an Stelle eines Punktes entsteht eine Fehlerfigur. Dieser Fehler hat zwar keine Verformung des Spaltbildes zur Folge, jedoch wird durch ihn das Auflösungsvermögen der Apparatur begrenzt. Um das Aussehen der Fehlerfigur zu untersuchen, setzen wir zunächst $D_1 = 0$, $D_2 \neq 0$. In der Bildebene wird der Gaußsche Punkt zu einem Strich der Länge $D_2\sigma^2 V$ in η-Richtung auseinandergezogen, wie es in Fig. 9a dargestellt ist. Ist umgekehrt $D_2 = 0$ und $D_1 \neq 0$, so erhalten wir die Ellipse

$$\Delta\xi = D_1\sigma^3 \sin 2\alpha \cdot V,$$
$$\Delta\eta = D_1\sigma^3\cos^2\alpha \cdot V = \tfrac{1}{2}D_1\sigma^3 V + \tfrac{1}{2}D_1\sigma^2 \cos 2\alpha \cdot V,$$

Bildpunkt zusammenfallen. In den beiden ersten Fällen sind die Ellipsenachsen mit der Massendispersion veränderlich, während die von β abhängige Größe der Ellipse bei dem Fehler 7 über das ganze Bildfeld konstant ist.

Der ortsbedingte Astigmatismus besteht aus einem isotropen und aus einem anisotropen Anteil. Bei dem isotropen Astigmatismus

$$\Delta\xi = N_1 y\sigma \cos\alpha \cdot V,$$
$$\Delta\eta = N_2 y\sigma \sin\alpha \cdot V$$

rühren die Abweichungen $\Delta\xi$ bzw. $\Delta\eta$ nur von den u-Koordinaten ($\sigma\cos\alpha$) bzw. v-Koordinaten ($\sigma\sin\alpha$) des betrachteten Strahls her. Entsprechend verursachen die u-Koordinaten ($\sigma\cos\alpha$) bzw. v-Koordinaten ($\sigma\sin\alpha$) beim anisotropen Astigmatismus

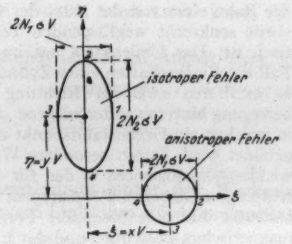
$$\Delta\xi = N_1 x\sigma \sin\alpha \cdot V,$$
$$\Delta\eta = N_1 x\sigma \cos\alpha \cdot V$$

Korrekturglieder $\Delta\eta$ bzw. $\Delta\xi$. Der isotrope Fehler hat als Fehlerfigur die in dem Teilbild 10a

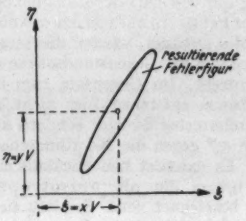
14) Zur Bezeichnung der einzelnen Fehler vergleiche: G. Wendt a. a. O. und G. Wendt, Bildfehler bei Ablenkung eines Kathodenstrahlbündels in zwei gekreuzten Ablenkfeldern. Z. Physik 118 (1942) H. 9/10.

dargestellte Ellipse zur Folge, während der anisotrope Fehler den in Fig. 10a gezeichneten Kreis ergibt. Die resultierende Fehlerfigur ist in Fig. 10b dargestellt.

Der isotrope Astigmatismus kommt bekanntlich dadurch zustande, daß diejenigen Strahlen des ursprünglich homozentrischen Bündels, welche in der Umlenkebene verlaufen, einen anderen Schnittpunkt haben als die Strahlen, welche in einer zur Umlenkebene senkrechten Ebene verlaufen. In den Schnittpunkten wird der Strahlquerschnitt zu zwei kurzen Strichen reduziert, welche aufeinander senkrecht stehen. Dort, wo die beiden Strichfiguren entstehen, ist



a



b

Fig. 10. Der ortsbedingte Astigmatismus. Die linke Abbildung zeigt den isotropen und anisotropen Fehleranteil, während auf dem Teilbild *b* die resultierende Fehlerfigur dargestellt ist. Für die beim isotropen und anisotropen Fehler durch die Ziffern 1, 2, 3, 4 gekennzeichneten Punkte hat α die gleichen Beträge $\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

also entweder $\Delta\xi = 0$ und $\Delta\eta \neq 0$ oder $\Delta\xi \neq 0$ und $\Delta\eta = 0$. Wandert der Bildpunkt ξ, η von der Bildmitte gegen den Rand, so bewegen sich die Strichfiguren auf verschiedenen Ebenen, welche gegen die optische Achse geneigt sind. Man spricht in diesem Zusammenhange von Bildneigungen; wir wollen sie jetzt berechnen.

Wir betrachten zunächst drei Strahlen, welche innerhalb der Umlenkebene verlaufen. In Fig. 11 ist das Bild der Aperturblende im Abstand M_b von der Bildebene dargestellt; zwischen beiden ist der Strahlenverlauf geradlinig (vergleiche hierzu Fig. 6). Der mittlere Strahl ($\sigma = 0$) trifft die Bildebene in dem Gaußschen Bildpunkt. Die beiden äußeren Strahlen sind mit einem Fehler $\Delta\eta$ behaftet. Wir wollen die Neigung $\mathrm{tg}\,\varepsilon_t$ der vom Durchstoßpunkt der optischen Achse mit der Bildebene nach dem Überkreuzungspunkt der Strahlen hinzielenden Geraden berechnen. Es ist $\mathrm{tg}\,\varepsilon_t = \frac{M_b - e}{d}$, d. h. wir müssen also e und d berechnen. Da $\frac{V \cdot y}{d} = \frac{M_b}{e}$, finden wir $d = e \cdot \frac{V \cdot y}{M_b}$. Weiter ist $\frac{V \cdot y + \Delta\eta - d}{d + V \cdot \sigma} = \frac{M_b - e}{e}$; ersetzen wir hier d, so wird e gleich $e = \frac{M_b \cdot V \cdot \sigma}{\Delta\eta + V \cdot \sigma}$. Mit $\Delta\eta = N_2 y \cdot \sigma \cdot V$ erhalten wir das Ergebnis:

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_t = \frac{M_b}{V} N_2 .$$

Die Neigung $\mathrm{tg}\,\varepsilon_t$ ist also unabhängig von der Bildkoordinate $\eta = y \cdot V$, d. h. diejenigen Stellen, für welche $\Delta\eta = 0$, liegen auf einer Geraden. Man bezeichnet diese Gerade, längs der sich die in der Umlenkebene verlaufenden Strahlen schneiden, als tangentiale Bildneigung. Entsprechend ist die sagittale Bildneigung

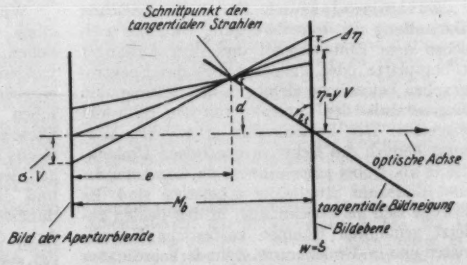


Fig. 11. Die Bestimmung der tangentialen Bildneigung.

diejenige Gerade längs der $\Delta\xi = 0$ gilt. Ihre Neigung $\mathrm{tg}\,\varepsilon_s$ läßt sich in völlig analoger Weise berechnen. Für die Bildneigungen gilt:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{tg}\,\varepsilon_t &= \frac{M_b}{V} N_2\,,\\ \mathrm{tg}\,\varepsilon_s &= \frac{M_b}{V} N_1\,.\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Als astigmatische Differenz oder als Astigmatismus A schlechthin definiert man die halbe Differenz beider Neigungen, also

$$A = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{tg}\,\varepsilon_t - \mathrm{tg}\,\varepsilon_s) = \frac{M_b}{2V}\,(N_2 - N_1)\,. \tag{73}$$

Da beim anisotropen Astigmatismus der Fehler $\Delta\xi$ nur von den v-Koordinaten des Strahles und der Fehler $\Delta\eta$ nur von den u-Koordinaten des Strahles anhängt, werden die Strahlen auf ihrem Weg von der Gegenstandsebene zur Bildebene verdreht. Im Gegensatz zum isotropen Astigmatismus entstehen hier nicht zwei zueinander senkrechte Striche, sondern nur einer, der unter 45^0 gegen die Koordinatenachse geneigt ist. Es existiert hier ebenfalls eine Bildneigung $\mathrm{tg}\,\varepsilon_{an}$, die als anisotrope Bildneigung bezeichnet wird. Sie läßt sich in der vorhin gezeigten Weise berechnen; es ergibt sich

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_{an} = \frac{M_b}{V} N_1\,,$$

d. h. die anisotrope Bildneigung fällt mit der sagittalen Bildneigung zusammen. Der isotrope Astigmatismus verschwindet nach (73) für $N_1 = N_2$. Um den anisotropen Anteil zu beseitigen, muß N_1 verschwinden. Das Umlenkfeld ist also nur dann anastigmatisch, wenn $N_1 = N_2 = 0$ gilt.

Der in (71) an letzter Stelle notierte Fehler bewirkt eine Verzerrung des Gaußschen Bildpunktes in ein Rechteck, dessen Seitenlängen proportional zu den Gegenstandskoordinaten x und y veränderlich sind.

Zusammenfassung: Zur mathematischen Darstellung der Ionenbewegung wird das zwischen dem Eintrittsspalt und dem Auffänger (Photoplatte oder Faradaykäfig) des Spektrographen befindliche Gebiet in drei Räume, den Gegenstands- den Umlenk- und den Bildraum eingeteilt. Der Umlenkraum grenzt den Wirkungsbereich des elektromagnetischen Umlenkfeldes ab, wobei jedoch innerhalb Gegenstands- und Bildraum Streufelder zugelassen sind. Es erweist sich als zweckmäßig, in den beiden zuletzt genannten Räumen kartesische Koordinaten und im Umlenkraum Zylinderkoordinaten zu benutzen. Das elektrische und magnetische Potentialfeld werden in Potenzreihen um diejenigen Achsen der Koordinatensysteme entwickelt, in deren Nähe sich die Ionenbewegung abspielt (Gerade im Gegenstands- und Bildraum, Kreisbogen im Umlenkraum). Die Bewegungsgleichungen werden aus dem Fermatschen Prinzip gewonnen. Nach dem Einsetzen der Potenzreihen in die Bewegungsgleichungen und Entwicklung der dort vorkommenden Wurzelausdrücke bis zu einschließlich Gliedern erster Ordnung, erhält man die Ionenbewegung in erster Näherung. Will man in Analogie zur geometrischen Lichtoptik eine „Gaußsche Dioptrik" definieren, so muß man als optische Achse einen von der mathematisch festgelegten Achse abweichenden Linienzug definieren, welcher mit der Bahn eines von der Mitte der Gegenstandsebene senkrecht wegfliegenden Teilchens identisch ist. Das Umlenkfeld hat im allgemeinen Fall die Eigenschaften einer Zylinderlinse, d. h. es existieren zwei, in Richtung der Ionenbewegung hintereinandergelegene „Bildebenen", in welchen ein Gegenstandspunkt als Strich abgebildet wird. Durch besondere Wahl der Entwicklungskoeffizienten in den für das Umlenkfeld angeschriebenen Potenzreihen — praktisch bedeutet dies eine besondere Formgebung der magnetischen Polschuhe und der Elektroden — können die beiden Pseudo-Bildebenen zu einer „wirklichen Bildebene" zusammengerückt werden, in der ein Gegenstandspunkt wieder als Punkt abgebildet wird (Punktabbildung). Die Gaußsche Dioptrik gestattet die Berechnung der geometrisch-optischen Konstanten des Gerätes, wie Lateralvergrößerung, Brennweiten, Hauptebenenlage, Gegenstands- und Bildweite, Dispersion und Auflösungsvermögen. Qualitative Überlegungen zeigen, daß die eben genannten Größen keine merkliche Beeinflussung durch die Streufelder erfahren, weshalb man praktisch ein „abgehacktes Umlenkfeld" annehmen darf. Die geometrisch-optischen Daten sind dann durch trigonometrische Funktionen darstellbar.

Wird die Entwicklung der Wurzelausdrücke einen Schritt weitergetrieben, d. h. werden neben den Gliedern erster Ordnung auch diejenigen zweiter Ordnung berücksichtigt, dann ergeben sich als Abweichungen von der Gaußschen Dioptrik die Fehler zweiter Ordnung. Diese zerfallen in die Fehler der optischen Achse (sechs Achsenfehler), die das Auflösungsvermögen der Apparatur praktisch nicht beeinflussen und die eigentlichen Bildfehler (neun Abbildungsfehler). Bei diesen treten verschiedene Arten der Verzeichnung, des Astigmatismus und der Aberration auf. Eine Diskussion der Bildfehler zeigt, daß das Auflösungsvermögen des

Spektrographen großer Intensität im wesentlichen durch die „ortsbedingte Aberration" ungünstig beeinflußt wird. Einfache Überlegungen zeigen, daß eine gute Abschätzung der einzelnen Fehlerbeträge auch dann noch möglich ist, wenn wieder ein abgehacktes Feld zugrundegelegt wird; sämtliche Fehler sind dann durch trigonometrische Funktionen darstellbar. Wird das abgehackte Umlenkfeld als punktabbildendes Potentialfeld ausgebildet — zwei Felder mit dieser Eigenschaft werden gezeigt —, so kann das Aussehen der einzelnen Abbildungsfehler leicht angegeben werden.

Herrn Dr. S. Flügge, der diese Arbeit angeregt und gefördert hat, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Berlin-Zehlendorf, im August 1943.

(Eingegangen 11. Oktober 1943)

Die Glimmentladung unter der Wirkung von sichtbarem Licht und Röntgenstrahlen

(Vorläufige Mitteilung)

Von R. Reiter

Selbständige Entladungen können bekanntlich durch verschiedene von außen kommende Einwirkungen beeinflußt werden. So wirkt vor allem auch eine Bestrahlung der Entladungsstrecke mit Licht verschiedener Wellenlänge auf den Ablauf der Entladungsvorgänge ein. Diese Tatsache ist zwar bekannt, jedoch scheint weder die Größe noch die Art dieser Einwirkung vor allem je nach den Eigenschaften und der Anwendungsweise der betreffenden Strahlung genauer bekannt zu sein. Im allgemeinen dürfte nach den Angaben des Schrifttums mit wenigen Ausnahmen eine die Entladungsvorgänge unterstützende Wirkung der Bestrahlung beobachtet worden sein. Ein grundsätzlich anderes Ergebnis brachten bereits frühere eigene Untersuchungen (1) über die Wirkung von Röntgenstrahlen auf selbständige Entladungen. Es hat sich nämlich gezeigt, daß beim Bestrahlen einer Gasstrecke mit Röntgenlicht eine Verringerung des durch die Entladungsröhre fließenden Stromes stattfindet. Unabhängig davon wurde, ähnlich wie dies vom sichtbaren Licht bekannt ist, das Einsetzen der Entladung bei derselben Versuchsanordnung erleichtert.

Bei diesen Versuchen war es noch nicht möglich die Entstehungsursachen dieser Effekte näher zu untersuchen. Die in vorliegender Arbeit beschriebenen Versuche sollen deshalb zur Klärung der Frage beitragen, welche Erscheinungen bei der Einwirkung vor allem der Röntgenstrahlen auf selbständige Entladungen auftreten und welche Ursachen diesen Effekten zugrunde liegen. Die entsprechenden Versuche mit sichtbarem Licht durchgeführt erleichtern aus verschiedenen Gründen den Einblick in das Geschehen bei den Röntgenversuchen und sind diesen deshalb in kurzer Form vorausgestellt.

Versuchsanordnung

Um zu entscheiden, welche Veränderungen an den Entladungsstrecken vor sich gehen, wenn sie den entsprechenden Versuchsbedingungen unterworfen werden, ist es notwendig, in erster Linie die Größe des Entladungsstromes und die jeweilige an den Elektroden liegende Spannung zu messen. Letzteres vor allem deshalb, um Änderungen der Zünd- und Löschspannung der Glimm-

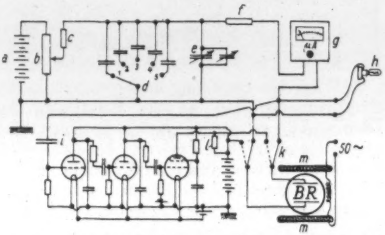


Fig. 1. Schaltschema der Versuchsanordnung. *a—f*) Anordnung zur Erzeugung von Kippschwingungen, *g*) Mikroamperemeter, *h*) Glimmlampe, *i*) Übertragerkondensator, *k*) Wähler, *BR* Braunsche Röhre.

strecke zu erfassen, zwei Größen, welche für den Entladungsvorgang besonders charakteristisch und aufschlußreich sind. Um sie beide möglichst leicht und fortlaufend ermitteln zu können, wurden gleichzeitig mit der zu untersuchenden Entladungsstrecke Kippschwingungen erzeugt, deren Frequenz beliebig zwischen 0,1 und 1000 Hz eingestellt werden konnte. Es ist bereits die Kippfrequenz allein ein Maß für das Verhalten der Zünd- und Löschspannung zueinander. Durch Beobachtung bzw. Registrierung der an den Elektroden liegenden Spannung mit einem Kathodenstrahloszillographen konnte sie zu jedem Zeitpunkt des Versuches genau ermittelt werden.

Die Einzelheiten der Versuchsanordnung sind aus Fig. 1 zu entnehmen. Die Kondensatoren 1—5, welche die Kippfrequenz bestimmen, wurden von der Batterie *a* über das Potentiometer *b* aufgeladen und über Regulierwiderstand *f*, Mikroamperemeter *g* und Versuchsglimmlampe *h* entladen (*e* Feinregulierung). Die Elektroden der Glimmlampe konnten über den Wähler *k* mit den Ablenkplatten der Braunschen Röhre *BR* in Verbindung gebracht werden. Gleichzeitig ermöglichte *k* den Anschluß der *BR* an den Ausgang eines Verstärkers, dessen Eingang die Kippschwingungen über *i* zugeleitet wurden. Der Ver-

stärker gab außerdem die Kippfrequenz durch einen Lautsprecher hörbar wieder. Zur Horizontalablenkung des Kathodenstrahls in der *BR* fand ein Spulenpaar *m* Verwendung, das von einem 50-Hz-Wechselstrom durchflossen war. Es konnte dadurch auf die Anwendung eines Kippgerätes verzichtet werden. Trotzdem bestand gleichzeitig die Möglichkeit einer bequemen Frequenzbestimmung. Wurde nämlich durch eine entsprechende Feinabstimmung der Kippfrequenz dafür gesorgt, daß sich am Leuchtschirm stehende Figuren abbildeten, so konnte durch Auszählen der auf $^1/_{50}$ Sekunde entfallenden Kippschwingungen deren Frequenz bestimmt werden. Für die beschriebenen Versuche mit sichtbarem Licht wurde ausschließlich eine allgemein gebräuchliche sog. „Frontmeldelampe" (Preßler) mit 110 V Brennspannung verwendet, deren Form wohl bekannt sein dürfte (Elektroden: Ring und Platte). Für die Röntgenversuche fand daneben auch eine einfache Bienenkorblampe (Phillips) Verwendung, die ebenso gebräuchlich ist. Bei beiden: Elektrodenmaterial *Mo*, Gasfüllung *Ne-He* Gemisch, ca. 20 mm *Hg*.

A. Sichtbares Licht

I. Kontinuierliche Entladungen

1. Wird eine Spannung knapp unterhalb der Zündspannung (Uz) an die Elektroden der Glimmlampe gelegt, so zündet sie sofort und nur so lange als ihre Kathode belichtet wird. Für das Auftreten dieser Erscheinung ist also allein der lichtelektrische Effekt verantwortlich zu machen, was nach den Angaben des Schrift-

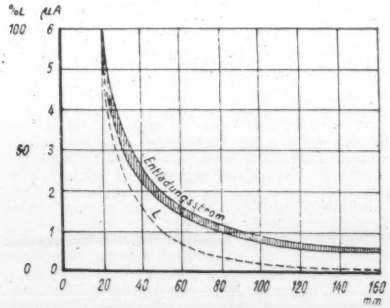


Fig. 2. Die Entladungsstromstärke als Funktion der Entfernung Kathode—Lichtquelle und deren maximale Streuung, sowie die Lichtintensität L in Prozenten als Funktion der Entfernung (gestr. Kurve).

tums natürlich nicht überrascht. Jedoch wird dort der Belichtung nur dann eine nennenswerte Wirkung zugeschrieben, wenn besonders lichtelektrisch aktives Elektrodenmaterial und möglichst kurzwellige Strahlung verwendet wird. Dies ist jedoch offenbar nicht der Fall. Der Entladungsstrom der Glimmlampe war bei der Belichtung sogar erheblichen Steigerungen unterworfen, ohne daß die beiden oben genannten Voraussetzungen in besonderem Maße erfüllt gewesen wären, wie Fig. 2 zeigt. Die Abszisse gibt die Entfernung der Lichtquelle (10 Watt-Autolampe) von der Kathodenfläche, die Ordinate die Entladungsstromstärke in μA an. Der Streubereich der Messung ist durch die beiden ausgezogenen Kurven begrenzt. Die Zunahme des Entladungsstromes ist jedoch nicht der Steigerung der Lichtintensität (gestr. Linie) proportional, sondern nur etwa der Quadratwurzel aus derselben.

II. Kipp-Entladungen

2. Wird die Kathode der Glimmstrecke belichtet während in der Glimmlampe Kipp-Entladungen stattfinden, so wird die Frequenz der Kippschwingungen erhöht. Die Fig. 3 zeigt für

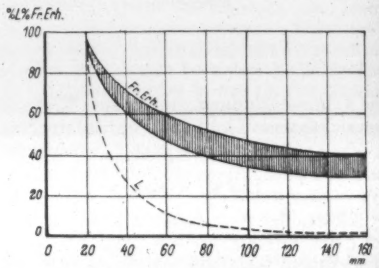


Fig. 3. Die Frequenzerhöhung in Prozenten als Funktion der Entfernung Kathode—Lichtquelle und deren maximale Streuung sowie die Lichtintensität L wie in Fig. 2.

einen Fall die Art der Abhängigkeit von der Lichtintensität. Die Frequenzerhöhung ist etwa der Kubikwurzel aus der Lichtintensität proportional. Es muß also bei der Belichtung die Differenz aus Zündspannung und Löschspannung (Ul) verringert werden. Wie sich nun Uz und Ul selbst verhalten, ergibt sich aus dem Kathodenstrahloszillogramm der Fig. 4.

3. Es wurde von 250 Hz als Grundfrequenz ausgegangen (untere Figur), der die Daten: $Uz = 70$ V, $Ul = 48$ V und Entladestrom $I = 21\ \mu$A zugrunde liegen. Es ist der sägezahnförmige Verlauf (rasche Entladung und langsamere Aufladung) gut zu erkennen. Wurde die Kathode belichtet und die Lichtintensität dauernd gesteigert, so sank Uz fortwährend ab, wobei aber Ul unverändert blieb (gleichzeitige Frequenzerhöhung ist selbstverständlich). Bei sehr starker Belichtung war die Kippfrequenz jenseits der oberen Hörschwelle verschwunden

und Uz auf den Wert von Ul und dieser gemeinsame Spannungswert U sogar unter den ursprünglichen Wert von Ul herabgesunken. Dieses Ergebnis ($U = 45$ V) stellt die Horizontale b in Fig. 4 dar (a Spannungsnullinie). Bei extrem starker Belichtung sank U sogar auf etwa 20 Proz. von Uz. Jede Zündspannungserniedrigung war mit einer Frequenzerhöhung verbunden. Die in Fig. 4 oben dargestellte Figur zeigt eine Frequenzerhöhung auf 350 Hz durch schwächere Belichtung mit den Werten: $Uz = 65$ V, $Ul = 48$ V und $I = 26\ \mu$A. Die Horizontale c gibt die Normalzündspannung $Uz = 70$ V an.

Das an Hand dieses Versuches geschilderte Verhalten von Uz, Ul und I zeigte sich als allgemeingültig bei den verschiedensten Glimmlampen und unter sonst veränderten Bedingungen. Sehr auffallend dagegen war eine Abweichung von dem gewohnten Bild, wenn mit der Glimmlampe ein hoher Widerstand in Reihe

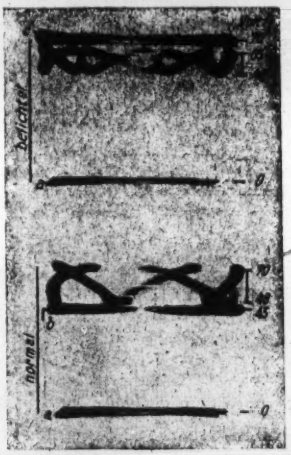


Fig. 4. Unten: Normaloszillogramm, dicht darunter Spannung U als Horizontale b bei maximaler Belichtung, ferner Spannungsnullinie a. Oben: Oszillogramm bei Belichtung, darüber Normal-Zündspannung c; Frequenzerhöhung von 250 Hz auf 350 Hz.

geschaltet war (0,8—1,0 Meg-Ohm). Dies soll folgender Versuch veranschaulichen:

4. In den meisten Fällen wurde unter dieser Bedingung keine Frequenzveränderung beobachtet, trotzdem bei der Belichtung eine eindeutige Senkung von Uz und Erhöhung von I festgestellt wurde. Dies zeigt Fig. 5a. Der Ausgangsfrequenz (unteres Oszillogramm) liegen zugrunde: $Uz = 65$ V, $Ul = 45$ V und $I = 17\ \mu$A. Bei der Belichtung (oberes Oszillogramm) ergaben sich $Uz = 56$ V, $Ul = 45$ V und $I = 21\ \mu$A. Die bei der Belichtung erniedrigte Zündspannung wurde zwar früher erreicht, jedoch einige Zeit beibehalten bis es schließlich zur Entladung kam.

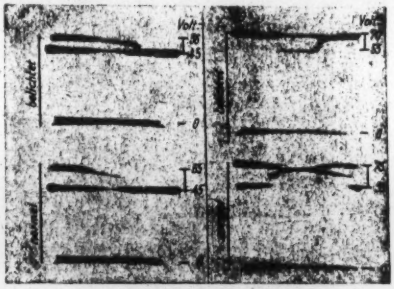


Fig. 5. Versuche mit hohem Serienwiderstand als Beispiele für den Pseudozündverzug.
a) Keine Frequenzänderung bei Belichtung.
b) Frequenzerniedrigung bei Belichtung.

5. Dieses Verhalten zeigt besonders ausgeprägt Fig. 5b. Bei diesem Versuch wurde bei der Belichtung sogar eine Frequenzerniedrigung auf den halben Wert der Ausgangsfrequenz beobachtet. Die einzelnen Daten sind: Ausgangsfrequenz 100 Hz, $Uz = 75$ V, $Ul = 55$ V, $I = 7{,}5\ \mu$A, bei Belichtung: 50 Hz, $Uz = 70$ V, $Ul = 55$ V, $I = 6{,}5\ \mu$A. Auch in diesem Falle wurde die erniedrigte Zündspannung, nachdem sie erreicht war, eine gewisse Zeit beibehalten.

III. Wechsellicht

6. Die Versuche mit Wechsellicht stellen auf dem Wege von der Lichtwirkung zur Röntgenstrahlenwirkung insofern ein Bindeglied dar, als die bei den Versuchen verwendeten Röntgenstrahlen ähnlich wie beim Wechsellicht nicht in jedem Zeitmoment gleich intensiv waren. Die Intensität des verwendeten Wechsellichts hatte 100mal, die des Röntgenlichts 50mal in der Sekunde ein Maximum (Halbwellenapparat).

Die bisher geschilderten Versuche mit Wechsellicht durchgeführt, zeigten in jedem Falle die gleichen Ergebnisse. Die Lichtwirkungen traten nur zutage, wie sie im vorausgehenden Teil beschrieben sind, anders jedoch, wenn die Braunsche Röhre nicht an die Glimmlampenelektroden direkt, sondern an den Verstärkerausgang ange-

schlossen wurde. Auf Fig. 6a ist die Grundfrequenz (500 Hz) zu erkennen. Bei mittelstarker Belichtung erhöhte sich die Kippfrequenz auf 700 Hz (6b), wobei Uz etwa um 5 Proz. gesunken war. Es ist zu erkennen, wie die Kippschwingung mit verringerter Amplitude bereits einer zweigipfeligen Grundschwingung überlagert ist. Wurde die Lichtintensität bis zum Verschwin-

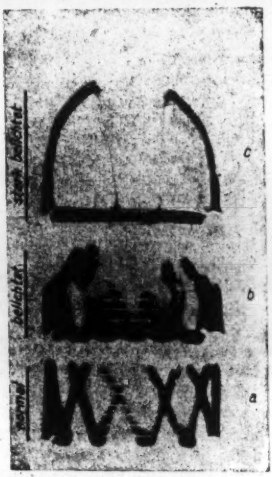


Fig. 6. Wirkung des Wechsellichts. Überlagerung der Kippschwingung und Lichtschwingung bei zunehmender Belichtung.

den der Kippfrequenz ($Uz = Ul$) gesteigert, so zeigte sich das Bild 6c. Die zweigipfelige Grundfrequenz ist mit erhöhter Amplitude übriggeblieben. Sie muß natürlich als Folge der mit 100 Hz schwingenden Lichtintensität angesehen werden.

B. Röntgenstrahlen

I. Versuche mit der Frontmeldelampe

Bei allen Untersuchungen der Röntgenstrahlenwirkung waren die Glimmlampen in einem geerdeten Faradaykäfig untergebracht und die Zuleitungen einwandfrei abgeschirmt. Ferner wurde in jedem Falle geprüft, ob die beobachteten Effekte durch Abhalten der Röntgenstrahlen mit Bleiblech ausblieben.

1. Wurde die an der Glimmstrecke liegende Spannung knapp unterhalb der Zündspannung gehalten, so verursachte Röntgenbestrahlung für die Dauer ihrer Einwirkung ähnlich wie sichtbares Licht das Durchbrechen der Entladung. Dieser Effekt ist eine Funktion der Strahlenintensität, jedoch war es aus technischen Gründen nicht möglich, den Verlauf dieser Funktion genauer zu bestimmen.

2. Durch die Wahl eines entsprechenden Kondensators wurde eine Grundfrequenz von 100 Hz hervorgerufen ($I = 6\,\mu A$). Röntgenbestrahlung bewirkte eine deutliche Frequenzerhöhung auf ca. 110 Hz bei einer Stromerhöhung auf 6,5 μA. Eine Reihe weiterer Versuche brachte dasselbe Ergebnis. Wurde die Spannung an den Glimmelektroden etwas geringer gewählt als Uz, so konnte durch Röntgenbestrahlung eine Kippschwingung von 50 Hz hervorgerufen werden, wie Fig. 7 veranschaulicht. Sie zeigt unten Nullinie und angelegte Spannung U, oben über der Nullinie die 50-Hz-Kippschwingung. Es wurde durch die Bestrahlung demnach Uz mindestens auf den Wert U gesenkt, wenn auch diese geringfügige Erniedrigung von Uz nicht mit Sicherheit aus der Aufnahme entnommen werden kann. Während der

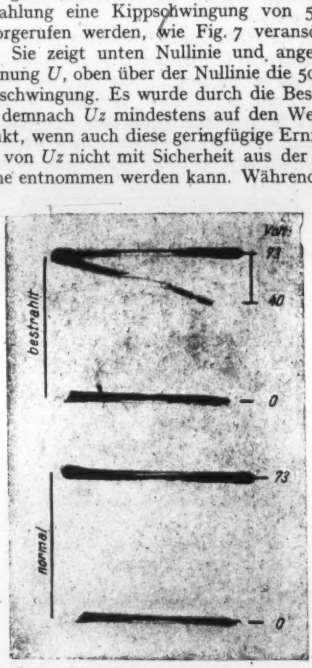


Fig. 7. Anregung einer 50-Hz-Schwingung (oben) durch Bestrahlung mit Röntgenlicht (Frontmeldelampe).

Bestrahlung floß ein Strom von 2 μA durch die Glimmstrecke.

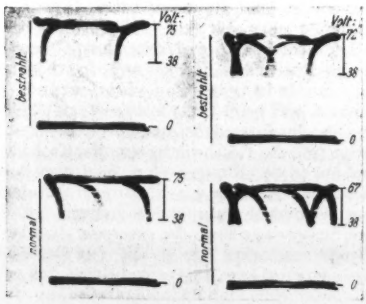
Bei diesen Versuchen war die Größe des Vorwiderstandes prinzipiell ohne Bedeutung, die Effekte waren nur um so kleiner, je größer der Vorwiderstand gewählt wurde. Diese Tatsache weist allerdings in Richtung einer Frequenzerniedrigung bei hohem Serienwiderstand, wie sie bei sichtbarem Licht beobachtet wurde.

II. Versuche mit der Bienenkorblampe

Es sei gleich an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß ein wichtiger Unterschied dieser Glimmlampe gegenüber der Frontmeldelampe darin besteht, daß ihr Volumen wesentlich größer ist als das jener (etwa 50fach). Dieses relativ große Volumen der Bienenkorblampe ist, wie später noch gezeigt werden soll, auch der Grund für das ganz andere Verhalten dieser Glimmlampe.

3. Wurde die Spannung an der Glimmstrecke etwas über der U_Z gehalten, so kam es bei der Bestrahlung zu einer Frequenzerniedrigung der Kippschwingungen, z. B. von 10 Hz auf 1,5 Hz bei einer gleichzeitigen Stromverminderung von 10 μA auf 6 μA. Bei höheren Frequenzen waren die Effekte zwar ebenfalls festzustellen, jedoch waren die Frequenzerniedrigungen dann nicht so ausgeprägt.

4. War der Bienenkorblampe ein größerer Widerstand in Serie geschaltet, so wurde bei der Röntgenbestrahlung eine Erniedrigung des Glimmstromes gefunden, unabhängig davon ob die Wirkung auf Kippschwingungen oder auf kontinuierliche Entladungen untersucht wurde. Die Frequenz der Kippschwingungen wurde bei der Bestrahlung deutlich verringert, und zwar dies bei niedrigen und hohen Ausgangsfrequenzen. Beispiele für die Frequenzerniedrigung sind



a b

Fig. 8. Frequenzerniedrigende Wirkung der Röntgenstrahlen bei einer Glimmlampe mit größeren Volumen (Bienenkorblampe).

die Fig. 8a und b. Es wurde von der Frequenz 150 Hz (8a) bzw. 300 Hz (8b) ausgegangen. Wie die Oszillogramme zeigen, wurde in jedem Falle die Frequenz bei der Bestrahlung um 50 Hz erniedrigt (jeweils obere Figuren). Gleichzeitig wurden Stromverminderungen um ca. 10 Proz. gemessen. Die Ursache der beobachteten Frequenzerniedrigungen ist in einer Erhöhung der Zündspannung während der Bestrahlung zu suchen. Während aus der Fig. 8a nicht mit Sicherheit auf graphischem Wege eine solche ermittelt werden kann, ergibt sich aus Fig. 8b eine eindeutige Steigerung der U_Z von 67 auf 72 V. Die Löschspannung bleibt in jedem Falle unverändert.

5. Die „Wechsellichtwirkung" der Röntgenstrahlung zeigt sich in deutlicher Parallele zu dem Versuch 6 mit sichtbarem Licht. Wurde

Fig. 9. Wechsellichtwirkung der Röntgenstrahlen. Koppelung von Kippschwingung und Röntgenlichtschwingung.

die Braunsche Röhre mit dem Verstärker verbunden, so ergab sich das aus Fig. 9 ersichtliche Bild. Die Ausgangsfrequenz war 500 Hz. Wie man erkennt, geht die Kippschwingung bei Bestrahlung in eine Schwingung von 100 Hz über. Es entsteht eine zweigipfelige Kurve, deren erster Teil eine volle Halbperiode von $^1/_{25}$ sec in Anspruch nimmt, während der zweite Teil mit der kleineren Amplitude in den Hintergrund tritt.

Besprechung der Versuchsergebnisse

A. Sichtbares Licht

Jedem der beobachteten Effekte liegt, wie schon erwähnt, der lichtelektrische Effekt zugrunde. Von diesem Gesichtspunkt aus gesehen stimmen die Angaben anderer Autoren gut überein. So fand Brinkmann (2) eine Erniedrigung der Zündspannung einer Funkenstrecke, wenn ein Fremdelektronenstrom durch Bestrahlen mit UV-Licht hervorgerufen wurde. Die Zündspannungssenkungen betrugen 30—40 Proz. Bei Entladungen in Wasserstoff konnten Fuchs und Schumacher (3) Zündspannungssenkungen durch Bestrahlen nachweisen, die jedoch relativ gering waren. In jedem Falle sind die durch Bestrahlung hervorgerufenen neuen Elektronen die Ursachen der Effekte. Es ist dabei

gleichgültig, welche Entstehungsursache der neuen Ladungsträger im einzelnen Fall maßgebend ist. So konnte Deimel (4) zeigen, daß erhebliche Zündspannungssenkungen der Glimmentladung auftreten, wenn durch eine Hilfsstrecke im Entladungsrohr Elektronen zusätzlich erzeugt werden. Deimel gibt Zündspannungssenkungen bis 80 Proz. der Norm an.

Wie Versuch 1 zeigt ist die Entladungsstromstärke bei einer belichteten Glimmstrecke nicht proportional der Lichtintensität, was u. U. anzunehmen gewesen wäre, denn der durch den lichtelektrischen Effekt hervorgerufene Elektronenstrom ist streng proportional der Lichtintensität. Die Photoelektronen gelangen jedoch, wenn sie die Kathode verlassen in das Gebiet der positiven Raumladung, welche sie teilweise durch Anlagerung an positive Ladungsteilchen verringern. Dadurch nimmt erstens nur ein Teil der insgesamt erzeugten Photoelektronen am Stromtransport teil, während der andere Teil den Kathodenfall verringert und somit die Zündspannungserniedrigung verursacht. Daraus erklärt sich gleichzeitig die Abweichung von der Proportionalität und die Zündspannungssenkung.

Die bei den Versuchen 2 und 3 gefundene Frequenzerhöhung bei der Belichtung der Kathode ist natürlich als Folge der Zündspannungserniedrigung anzusehen. Es wurde geprüft, ob sich die Frequenzerhöhungen tatsächlich rechnerisch aus den Zündspannungsänderungen ergeben. Dies war mit ausreichender Genauigkeit der Fall. Es wurden dabei die von Righi [nach Möller (5)] angegebenen Gleichungen verwendet.

Die von der Norm abweichenden Ergebnisse des Versuches 4 und 5 lassen sich folgendermaßen erklären. Durch die Belichtung wird auf jeden Fall wieder ein Photoelektronenstrom ausgelöst, der sich durch Stoßionisation entsprechend verstärkt. Es tritt eine Stromerhöhung auf (z. B. von 17 auf 21 μA bei Versuch 4), die im Zusammenhang mit dem hohen vorgeschalteten Widerstand einen Spannungsabfall an der Glimmstrecke bewirkt. Die Spannung sinkt deshalb bei entsprechend starker Belichtung auf einen Wert, der niedriger ist als die, der Belichtung entsprechend verminderte Zündspannung. Das Erreichen dieses Spannungswertes ist dadurch charakterisiert, daß sich ein Gleichgewicht einstellt zwischen Aufladung und Entladung des Kippkondensators, d. h. seine Ladung hält einen bestimmten Ladungswert bei, der, wie gesagt, unterhalb der Zündspannung liegt. Es vergeht also nun eine gewisse Zeit, bis durch die Wirkung der Photoelektronen die Trägerlawinenbildung einsetzt und die Glimmlampe zündet. Damit wird ohne weiteres der Verlauf der Kurven in Fig. 5a und b oben leicht verständlich und es ist damit auch eine Frequenzverminderung bei Belichtung vereinbar. Diese Erscheinung könnte als „Pseudozündverzug" bezeichnet werden, im Gegensatz zum wirklichen Zündverzug, für den eigentümlich ist, daß die Spannung auch nach erreichter Zündspannung weiter steigt.

Bei Wechselbelichtung hätte angenommen werden können, daß die Zündspannung mit der Schwingungsfrequenz des Lichts schwingen würde. Dies ist jedoch erst dann merklich der Fall, wenn sich die Zündspannung der Löschspannung weitgehend (auf 1—2 V) genähert hat. Die Erscheinung konnte deshalb auch nicht deutlich beobachtet werden, wenn die Braunsche Röhre direkt an die Glimmelektroden angeschlossen war. Sie zeigte sich erst, wenn ein Verstärker zwischengeschaltet wurde.

B. Röntgenstrahlung

An die Betrachtung der Versuchsergebnisse über die Röntgenstrahlenwirkung muß aus anderer Richtung herangegangen werden. Infolge der hohen Energie der Röntgenstrahlenquanten (es fand die durch 1 mm *Al* gefilterte Strahlung einer mit 50 kV betriebenen Glühkathodenröntgenröhre Verwendung) besitzen sie die Möglichkeit direkt auf das Füllgas der Entladungsröhren ionisierend zu wirken, was beim Licht keineswegs der Fall ist. Die schnellsten dabei ausgelösten Elektronen haben fast die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen in der Röntgenröhre. Es treten dabei allerdings auch Compton-Elektronen auf, deren Geschwindigkeit zwar etwas geringer ist, die aber nur etwa 10 Proz. der gesamten gestreuten Energie ausmachen (bei 50 kV). Die Zahl der Ionisationsakte steigt erheblich mit der Geschwindigkeit der Photoelektronen an, während die Absorption mehr in den Hintergrund tritt. Die photoelektrisch bedingten Ionisationsvorgänge werden bei diesen hohen Elektronengeschwindigkeiten mehr oder weniger zur Wirkung kommen je nachdem das Volumen der Entladungsröhre größer oder kleiner ist. Es könnte dagegen gesagt werden, daß in verhältnismäßig verdünnten Gasen, wie den Füllgasen der Glimmröhren eine nur sehr schwache Ionisation durch Strahlung stattfinden wird. Es ist jedoch zu bedenken, daß in diesem Falle auch die Wiedervereinigungszahl der Ionen entsprechend klein ist, also jedes einzelne Ion entsprechend der Verdünnung we-

sentlich länger am Leben bleibt. Es ist deshalb nicht anzunehmen, daß durch die Verdünnung der Grad der Ionisation wesentlich herabgesetzt wird.

In der Tat zeigen die Versuche ein grundsätzlich anderes Verhalten der Bienenkorblampe gegenüber der Frontmeldelampe (mit nur kleinem Volumen). Es darf nicht übersehen werden, daß die Effekte bei den Röntgenstrahlen natürlich erheblich kleiner und auch schwieriger nachzuweisen sind als beim sichtbaren Licht. Während bei der Röntgenstrahlung die einzelnen Quanten zwar ungleich viel energiereicher sind, so ist doch die Zahl der durchschnittlich in den gleichen Raumwinkel hinausgestrahlten Quanten eine viel geringere als beim sichtbaren Licht.

So weit sich Übereinstimmung (Vers. 1 und 2) mit den Versuchen beim sichtbaren Licht zeigte, müssen für die Ursachen der Effekte dieselben wie dort angenommen werden. Wenn auch den Oszillogrammen nicht mit Sicherheit eine Zündspannungserniedrigung auf graphischem Wege entnommen werden kann, so muß sie doch auf Grund der Versuche 1 und 2 als sicher angenommen werden. Daß bei hohem Vorwiderstand kein eigentlicher Pseudozündverzug festgestellt werden konnte, liegt wohl an der nicht ausreichenden Intensität der Strahlung. Jedenfalls deutet aber die Abnahme der Frequenzerhöhung mit zunehmendem Widerstand in dieser Richtung.

Bei der Bienenkorblampe konnte durchweg eine Frequenzverminderung und Stromerniedrigung insbesondere bei hohem Vorwiderstand nachgewiesen werden. Diese Versuche (3 und 4) stehen im Einklang mit den schon früher mitgeteilten Untersuchungen [Reiter (1)], die ebenfalls an Entladungsröhren mit relativ großem Volumen durchgeführt wurden. Die Ergebnisse können ohne weiteres damit erklärt werden, daß die überaus schnellen Photoelektronen wesentlich mehr Ionisationen bewirken bis dieselben durch Absorption dem aktiven Geschehen entzogen werden. Daraus folgt, daß sie die Raumladung vor der Kathode, den Kathodenfall also vergrößern und damit die Zündspannung erhöhen. Dadurch wird zwangsweise eine Frequenzerniedrigung der Kippschwingungen sowie eine Stromverminderung bei kontinuierlichen Entladungen verursacht. Eine deutliche Zündspannungserhöhung konnte bei Versuch 4 nachgewiesen werden. Für das Auftreten eines Pseudozündverzuges bei hohem Vorwiderstand fehlen hier die Voraussetzungen, da die Entladungsstromstärke ja nicht erhöht, sondern vermindert wird. Die Erscheinungen treten durch den Vorwiderstand in diesem Falle nur deutlicher zutage.

An dieser Stelle sei auf die Versuche von Fuchs und Seitz (6) hingewiesen. Diese Autoren fanden unter den Voraussetzungen homogenes Feld, homogenes Gas und statischer Durchschlag eine Erhöhung der Zündspannung, bewirkt durch den sehr ultravioletten Teil des UV-Spektrums, während sichtbares Licht ohne Wirkung blieb. In einer anderen Arbeit dieser Autoren (7) wird in *Ar* unter Verwendung von *Ag*-Elektroden eine Erhöhung der Zündspannung um 7,5 V angegeben. Die Ursache der Effekte scheint nicht leicht zu erkennen zu sein [siehe Schade (8)], auch können sie wegen der z. T. erheblichen Abweichungen von unseren Versuchsbedingungen nicht unbedingt als Parallele zu unseren Röntgenversuchen aufgefaßt werden. Immerhin ist bemerkenswert, daß schon einmal unter der Wirkung einer sehr kurzwelligen Strahlung eine Zündspannungserhöhung nachgewiesen werden konnte.

Die „Wechsellichtwirkung" der Röntgenstrahlen ist eine Analogie zu derselben Erscheinung beim sichtbaren Wechsellicht. Während jedoch dort die durch Belichtung erhöhte Grundschwingung der Lichtschwingung überlagert wird, scheint es bei der Röntgenbestrahlung zu einer Art Koppelung zwischen der Kippschwingung und der Röntgenlichtschwingung (50 Hz) zu kommen, so daß in diesem Falle vorzugsweise eine Kippfrequenz von $n \cdot 50$ Hz entsteht. Dies geht aus Fig. 9 hervor. Durch die Bestrahlung erfolgt eine Frequenzverminderung (Bienenkorblampe!) auf 100 Hz, wobei jeweils eine Schwingung mit dem Intensitätsmaximum der Strahlung (hoher Gipfel) zusammenfällt, der andere darauf als spontane Kippschwingung in Erscheinung tritt. Diese Koppelung kam auch dadurch sehr gut zum Ausdruck, daß es kaum möglich war, während der Röntgenbestrahlung der Glimmstrecke am Leuchtschirm wandernde Figuren zu bekommen (Horizontalablenkung mit 50 Hz!). Die Erregung einer Kippschwingung unter 50 Hz durch Bestrahlung war unmöglich, die niedrigste betrug 50 Hz (Fig. 7).

Zusammenfassung

An Hand einer Reihe von Versuchen wird die Wirkung des sichtbaren Lichts sowie der Röntgenstrahlen auf selbständige Entladungen behandelt. Durch die Belichtung kann eine halbselbständige Entladung hervorgerufen werden, wobei der Entladungsstrom der Quadratwurzel aus der Lichtintensität proportional ist. Wird die Glimmlampe als Kippschwingungsgenerator

verwendet, so kommt es bei der Bestrahlung derselben zu einer Frequenzerhöhung, die annähernd der Kubikwurzel aus der Lichtintensität proportional ist. Die Frequenzerhöhung ist die Folge einer Zündspannungserniedrigung, die ihrerseits ihre Ursache im lichtelektrischen Effekt hat. Die Löschspannung bleibt normalerweise bei der Belichtung unverändert. Ist ein hoher Serienwiderstand vor die Glimmlampe geschaltet, so kann es u. U. zu einer Erhöhung der Löschspannung kommen. Bei dieser Anordnung konnte auch ein Pseudozündverzug beobachtet werden, der seine Ursache in einer zusätzlichen Spannungsverminderung bei Belichtung und der dadurch erschwerten Stoßionisierung hat. Wechsellicht verhält sich wie Gleichlicht, nur mit dem Unterschied, daß sich die Lichtschwingungen auf das Kippsystem übertragen und mit einer Verstärkeranordnung nachgewiesen werden können.

Die Wirkung der Röntgenstrahlen ist von der Wirkung des sichtbaren Lichts nicht verschieden, solange das Volumen der bestrahlten Glimmlampe klein ist. Bei der Untersuchung einer Glimmlampe mit sehr großem Volumen wurden eindeutige Frequenz- und Stromerniedrigungen beobachtet, welchen eine Zündspannungserhöhung bei Bestrahlung zugrunde liegt. Die Schwingungen des Röntgenlichts können sich ähnlich wie beim Wechsellicht auf das Kippsystem übertragen, wobei es zu einer Koppelung zwischen der Kippfrequenz und der Wechselfrequenz des Röntgenlichts kommt.

Literaturverzeichnis

1) Reiter, Fortschr. Gebiete Röntgenstrahlen **63** (1941) 154, Heft 3.
2) Brinkmann, Arch. Elektrotechn. **33** (1939) 121.
3) Fuchs und Schumacher, Verh. dtsch. physik. Ges. (3) **20** (1939) 80.
4) Deimel, Physik. Z. **37** (1936) 610.
5) Möller, Photozelle-Glimmlampe-Braunsche Röhre. J. Schneider, Berlin 1941.
6) Fuchs und Seitz, Z. Physik **103** (1936) 1.
7) Fuchs und Seitz, Naturwiss. **24** (1936) 346.
8) Schade, Naturwiss. **24** (1936) 813.

Ferner:

Seeliger, Physik der Gasentladungen. J. A. Barth, Leipzig 1934.

Liechti, Röntgenphysik, Springer, Wien 1939.

München, 20. April 1943.

(Eingegangen 28. April 1943; endgültige Fassung 4. Januar 1944)

Eine zweidimensionale Hydrodynamik

Von Raphael Ed. Liesegang

Aus dem Institut für Kolloidforschung und dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Biophysik, Frankfurt a. M

Eine solche war 1898 von H. Shaw eingeführt worden, indem er in die zwischen Glasplatten strömende Flüssigkeit nebeneinanderliegende Streifen von gefärbter Flüssigkeit mitreißen und diese durch eingebrachte Hindernisse ablenken ließ. Prandtl hat das von R. Pohl abgeänderte Verfahren für den Unterricht übernommen. Das Bild, das er hiervon in seiner Hydrodynamik (Abb. 117) gibt, kann auch auf eine andere Weise erzielt werden und ist dann gleich in der Dauerform.

Auf die eine Kante eines Bogens ungeleimten (Fließ-) Papiers werden in geringem Abstand voneinander Tropfen einer wässerigen Farbstofflösung aufgesetzt. Mit dieser Kante wird der senkrecht aufgehängte Bogen nur so weit in Wasser getaucht, daß dessen Spiegel die Tropfen noch nicht erreicht. Das Wasser steigt kapillar hoch und reißt den Farbstoff in Form scharfbegrenzter paralleler Schlieren mit hoch. Das Hindernis bei der Pohlschen Anordnung wird hier ersetzt durch einen kreisförmigen oder anders geformten Einschnitt in das Papier. Verstopfung der Poren mit Gelatinelösung würde ebenso wirken, jedoch ist die scharfe Begrenzung damit schwieriger zu erhalten. Verwendung von zwei verschiedenen Farbstoffen, die abwechselnd aufeinander folgen, macht das Bild noch anschaulicher.

Die Wahl der Farbstoffe ist nicht so einfach, wie man es zuerst glauben möchte. Jeder hat seine Eigenheiten, die hier Vorteile oder Nachteile bedeuten. Da man gewöhnlich Wasser aufsteigen lassen wird, ist natürlich hinreichende Wasserlöslichkeit Voraussetzung. Trypanblau hat als saurer Farbstoff den Vorteil, ebenso rasch wie das Wasser zu wandern. Da es substantiv ist, hinterläßt es im Papier eine kräftige blaue Spur, im Gegensatz z. B. zum Säurefuchsin, das man zum Schluß nur ganz oben findet. Ebenso verhält sich Trypanrot, so daß man für das Zweifarbenbild darin einen Partner hat. Beide sind aber fast immer durch einen rötlichen bzw. gelblichen Farbstoff verunreinigt, der nicht substantiv ist und deshalb in den höher gelegenen Teilen größerer Blätter etwas seitlich streut und dadurch etwas Unschärfe bringt. Ein Chinablau hatte diesen Fehler nicht. Bei längerer Versuchsdauer und wenn die Konzentration im Tropfenaufsatz ungenügend war, macht sich aber eine Anreicherung in der Spitze

dadurch störend bemerkbar, daß ihr unterer Teil heller gefärbt war. Man kann das dadurch ausgleichen, daß man etwas Trypanblau beimischt. So ist Fig. 1 auf einem Blatt 23 × 29 cm in einer Stunde entstanden.

Die besonders bei großen Bogen immer notwendige hohe Konzentration wird dadurch erreicht, daß man auf dieselbe Stelle mehrmals gleiche Tropfen aufsetzt, nachdem immer der vorhergehende vollkommen eingetrocknet war. Sollte es darauf ankommen, auf engem Raum viele, sehr schmale Schlieren anzubringen, so zeichnet man kurze senkrechte Striche mit der Schreibfeder. Das muß bis zu zehnmal wiederholt werden. — Die Steighöhe des Wassers ist bei einem Fließpapier von Schleicher & Schüll Nr. 117 weiß etwa 20 cm nach 20 Minuten. Die äußerste Steighöhe ist nicht allein durch die Verdunstung auf etwa 50 cm begrenzt, sondern auch deshalb, weil das Papier Verunreinigungen enthält, die wie saure Farbstoffe mit der Wasserfront wandern und durch ihre dortige Anreicherung die Poren verstopfen. Vorheriges Auswaschen des Papiers kann zwar diesen Fehler abschwächen, aber jene Farbstoffe, die sich an der Schlierenspitze anreichern, wirken dort ebenfalls verstopfend. Da bei solch großen Bogen der Aufstieg mehrere Stunden dauert, sind sie übrigens weniger zu einem Vorlesungsversuch geeignet. Anfänglich wirken solche Porenverstopfungen durch den Farbstoff (oder zugesetzte Gelatine) eher günstig, weil sie eine Zuspitzung der Schlieren herbeiführen. Eine Abänderung des Versuchs besteht darin, daß man mit dem Glasstab kleine Einzeltropfen von Trypanblau über den ganzen Bogen verteilt. Die daraus entstehenden kurzen Schlieren sind Wegweiser für die jeweilige Richtung des örtlichen Stroms. Schafft man durch schmalen Ausschnitt eine nach oben geöffnete Kelchform, so senkt sich in diesem der Wasserstrom nach unten. Innerhalb des Kelchs sind deshalb die Spitzen der Schlieren nach unten gerichtet, darüber nach oben. An einer Stelle findet man Schlierenfreiheit, d. h. Erhaltung der ursprünglichen Tropfenform, die auf örtliche Stromlosigkeit hinweist. Es ist empfehlenswert, zu verschiedenen Zeiten der Entwicklung die Grenzen des Wasserstandes einzuzeichnen, wodurch das Verständnis des endgültigen Bildes sehr erleichtert wird. Immer stehen die Spitzen der Schlieren senkrecht auf dem nächsten Teil der Wasserstandslinie. (Hierbei zeigt sich ebenfalls ein Vorteil des Trypanblaus z. B. gegenüber dem Malachitgrün. Letzteres reichert sich trotz seines basischen Charakters etwas an der Spitze an, so daß man Tropfen und Spitze nachher verwechseln könnte.) Die Länge dieser Schlieren gibt auch ein Maß dafür, wie viel Wasser den betreffenden Ort durchströmt hat. Die Wasserstandslinien zeigen zugleich durch Muldenbildungen jene Orte an, wo durch den, an sich wasserlöslichen Farbstoff, zeitweilig eine Porenverstopfung eingetreten ist. Beim Versuch von Pohl reißt die Schwerkraft des Wassers den Farbstoff mit. Beim Kapillarversuch spielt die Schwerkraft keine Rolle. Das die Bewegung des Wassers und damit der Farbstoffe Bedingende ist der kapillare Sog, der an der Grenze

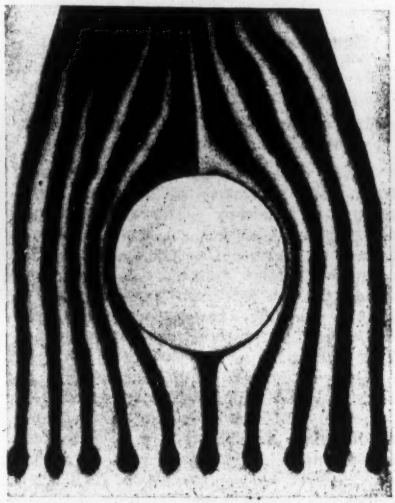


Fig. 1. Kapillarbild mit Chinablau und Trypanblau, verkleinert.

des jeweils Trocknen und Feuchten sitzt. Deshalb sind die Schlieren immer senkrecht auf die nächstgelegenen Wasserstandslinien eingestellt. Bei Farbstoffen, die ebenso rasch wandern wie Wasser und solchen, die Wasser erheblich vorauswandern lassen, ist der Unterschied in der Ablenkung vor dem Hindernis geringer, als man erwarten könnte. Das zeigt sich auch dann, wenn man z. B. beim Trypanblau die Stelle zwischen Tropfen und Hindernis vor dem Einhängen mit Wasser anfeuchtet, also ein künstliches Vorwandern des Wassers schafft. Man vermeidet damit, daß sich unterhalb des Hindernisses schwache seitliche Verbreiterungen zur Mitte zu zeigen, welche den noch nicht abgelenkten anfänglichen Wasserstrom anzeigen. Andererseits können aber gerade diese für den Einsichtigen lehrreich sein. — Unabhängig von einem Ersatzversuch für die Anordnung von

Pohl ist eine Kapillar-Hydrodynamik von Wichtigkeit für die Technik des Färbens und für gewisse Gebiete der Geologie, Bodenkunde und Botanik.

Zusammenfassung: Hinweis auf die Möglichkeit eines Ersatzes des Pohlschen Tintenfluß-Versuches durch kapillaren Farbstoffaufstieg in ungeleimtem Papier.

Frankfurt a. M.

(Eingegangen 8. Januar 1944)

Zur Absolutmessung der spektralen Empfindlichkeit von Photozellen

Von W. Leo

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin-Charlottenburg)

Während die Messung des relativen spektralen Empfindlichkeitsverlaufs von Photozellen oder anderen selektiven Strahlungsempfängern im allgemeinen keine besonderen Schwierigkeiten macht, ist ein wesentlich höherer meßtechnischer Aufwand notwendig, wenn die Angabe der spektralen Empfindlichkeit in absolutem Maß — bezogen auf monochromatische Bestrahlungsstärke oder auf Strahlungsfluß — gefordert wird.

Die relative Empfindlichkeitsmessung bedarf nur des Vergleichs des Photozellenstroms mit dem entsprechenden Strom eines wellenlängenunabhängigen Empfängers — z. B. eines Thermoelementes —, bei Bestrahlung mit dem Licht verschiedener Wellenlängen, wobei die Flächengrößen von Photozelle und Vergleichsempfänger beliebige sein können. Es muß nur dafür gesorgt sein, daß bei jeder Wellenlänge das Verhältnis der bestrahlten Flächen beider-Empfänger zueinander das gleiche bleibt.

Anders bei der Bestimmung von absoluten Empfindlichkeiten von Photozellen. Hier muß die monochromatische Bestrahlungsstärke (oder der Strahlungsfluß) ihrem Betrage nach bekannt sein, die bei gegebener Wellenlänge einen bestimmten Strom der zu eichenden Photozelle hervorruft. Zur Ermittlung dieser Größen muß daher der dem Strahlungsfeld ausgesetzte Vergleichsempfänger (Thermoelement oder Bolometer) eine bekannte, definierte Flächengröße besitzen und seinerseits in seinen Empfindlichkeitsdaten geeicht sein[1]). Dies bedingt einen zusätzlichen Meßvorgang, der u. U. bei Thermoelementen mit inhomogener Empfindlichkeitsverteilung längs des Thermofadens zu Fehlern und meßtechnischen Schwierigkeiten führt oder überhaupt die Benutzung umständlicher zu handhabender großflächiger, homogener Empfänger (Flächenbolometer) notwendig macht.

Zur Umgehung dieser oft zeitraubenden Messungen hat Theissing[2]) ein vereinfachtes Verfahren angegeben, nach dem sich die Ordinaten einer in relativem Maß bekannten Empfindlichkeitskurve einer Photozelle durch Messung des Photostroms bei Belichtung der Zelle mit einer Hefnerlampe ermitteln lassen. Dies Verfahren setzt allerdings voraus, daß die Empfindlichkeit der zu eichenden Photozelle nicht zu weit im Ultravioletten liegt; außerdem muß eine Integration der Produktwerte aus der schon bekannten relativen Zellenempfindlichkeit und der spektralen Energieverteilung der Hefnerkerze durchgeführt werden.

Die Eichung der Absolutempfindlichkeit von Photozellen läßt sich jedoch noch weiter vereinfachen, wenn man in üblicher Weise zunächst nur die relative spektrale Empfindlichkeitsverteilung mißt und den wellenlängenunabhängigen Vergleichsempfänger (Thermoelement) sodann nur dazu benutzt, die Strahlungsstärke eines oder mehrerer monochromatischer Lichtbüschel mit der Gesamtstrahlung einer Hefnerkerze — oder besser einer in Watt/cm² geeichten Normalglühlampe — zu vergleichen. Bei dieser Messung braucht die Flächengröße des Thermoempfängers und seine Empfindlichkeitsdaten nicht bekannt zu sein, der Empfänger selbst kann längs seiner Auffangfläche auch beliebige inhomogene Empfindlichkeitsverteilung besitzen.

Der Meßvorgang gestaltet sich dann folgendermaßen: Nachdem die relative Empfindlichkeitskurve der zu eichenden Zelle durch Vergleichsmessung am Monochromator gegen ein Thermoelement bestimmt ist, wird das Thermoelement der Gesamtstrahlung der geeichten Normallampe ausgesetzt und der hierbei erzielte Galvanometer-Ausschlag A_1 gemessen. Sodann wird durch den Monochromator oder durch eine Quecksilberlampe mit geeigneter Filterkombination[3]) ein möglichst homogenes monochromatisches Strahlenbüschel hergestellt, mit dem nunmehr das Thermoelement bestrahlt wird und einen Galvanometerausschlag A_2 erzeugt. Unabhängig von der Flächengröße und Empfindlichkeit des Thermoelements ist dann

$$S_\lambda = S_0 \frac{A_2}{A_1}$$

1) Vgl. z. B. A. E. H. Meyer u. E. O. Seitz, Ultraviolette Strahlen, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1942. S. 146—147.

2) H. Theissing, Physik. Z. **36** (1935) 683.

3) Zu beachten ist dabei, daß Filterkombinationen benutzt werden, die auch entfernt liegende Spektralbereiche, insbesondere die ultrarote Wärmestrahlung völlig abschneiden, da durch diese Störstrahlung sonst erhebliche Meßfehler verursacht werden können.

die monochromatische Bestrahlungsstärke des Büschels in Watt/cm², wenn S_0 der bekannte Gesamtstrahlungs-Eichwert der Normalglühlampe ist.

Grenzt man nun aus dem monochromatischen Strahlenbüschel durch eine Blende definierter Größe einen bestimmten Strahlungsfluß aus, dem man die Photozelle aussetzt, so kann man aus dem hierbei gemessenen Photostrom unmittelbar die Ordinate der in relativem Maß vorliegenden Zellenempfindlichkeitskurve für die gegebene Wellenlänge in A/Watt berechnen.

Indem man dies Verfahren durch Benutzung verschiedener Monochromatfilter oder verschiedener Monochromatoreinstellungen bei zwei oder mehreren Wellenlängen wiederholt, erhält man eine gute Kontrolle der erzielten Meßgenauigkeit, da die bei den verschiedenen Wellenlängen erhaltenen absoluten Empfindlichkeitswerte mit dem Verlauf der relativen Empfindlichkeitsverteilung zusammenfallen müssen.

(Eingegangen 18. Dezember 1943)

Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich $10^h\,40^{min}$

Der Wert f der ausgestrahlten Normalfrequenz hat betragen:

$f_1 = 1000 \cdot (1 + \delta \cdot 10^{-9})$ Hz von $10^h\,40^{min}$ — $10^h\,46^{min}$ und

$f_2 = 440 \cdot (1 + \delta \cdot 10^{-9})$ Hz von $10^h\,46^{min}$ — $10^h\,49^{min}$.

1943	δ	1943	δ
November 1	— 16	November 16	— 14
2	— 16	17	— 14
3	— 18	18	— 14
4	— 17	19	— 13
5	— 11	20	— 12
6	— 4	21	—
7	—	22	— 13
8	— 4	23	—[1]
9	— 9	24	—[1]
10	— 9	25	— 28
11	— 7	26	— 2
12	— 10	27	—[1]
13	— 14	28	—
14	—	29	—[1]
15	— 15	30	— 10

1) Nicht aufgenommen.

Berlin-Charlottenburg, den 8. Dezember 1943.

Physikalisch-Technische Reichsanstalt,
Abteilung II.

Im Auftrage:
A. Scheibe, U. Adelsberger

Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich $10^h\,40^{min}$

Der Wert f der ausgestrahlten Normalfreqenz hat betragen:

$f_1 = 1000 \cdot (1 + \delta \cdot 10^{-9})$ Hz von $10^h\,40^{min}$ — $10^h\,46^{min}$ und

$f_2 = 440 \cdot (1 + \delta \cdot 10^{-9})$ Hz von $10^h\,46^{min}$ — $10^h\,49^{min}$.

1943	δ	1943	δ
Dezember 1	+ 18	Dezember 16	+ 26
2	+ 8	17	+ 21
3	—[1]	18	+ 24
4	—[1]	19	—
5	—	20	+ 26
6	+ 17	21	+ 25
7	+ 27	22	+ 26
8	+ 25	23	+ 15
9	+ 15	24	+ 18
10	+ 14	25	—
11	+ 20	26	—
12	—	27	—[2]
13	+ 16	28	+ 11
14	+ 16	29	+ 18
15	+ 18	30	+ 18
		31	+ 24

1) nicht ausgesendet
2) nicht aufgenommen.

Berlin-Charlottenburg, den 7. Januar 1944.

Physikalisch-Technische Reichsanstalt,
Abteilung II.

Im Auftrage:
A. Scheibe, U. Adelsberger

Zur Geschichte des Elektronenmikroskops

Von K. Küpfmüller

Neben den großen Fortschritten, die das Elektronenmikroskop in den letzten Jahren gebracht hat, sind auch Diskussionen über seine geschichtliche Entwicklung entstanden. Solche Diskussionen sind als berechtigt anzusehen, wenn sie der Klärung des Sachverhaltes dienen. Bei der Durchsicht der darüber erschienenen Beiträge stört nun, daß die verschiedenen Formen der Elektronenmikroskope nicht immer eindeutig auseinandergehalten worden sind. Dadurch wird es dem nicht unmittelbar Beteiligten erschwert, sich ein klares Bild zu verschaffen, da die Entwicklung bei den Elektronenmikroskopen für Durchstrahlung, für Emissionsabbildung und für Rückstrahlung sehr verschieden verlaufen ist.

Bei der Feststellung der wissenschaftlichen Priorität gilt es als ein Grundsatz, daß der Zeitpunkt als maßgebend anerkannt wird, zu dem der betreffende Gegenstand der Öffentlichkeit zur Verfügung gestellt oder bekannt gegeben wurde. Bei Veröffentlichungen ist daher das Einreichungsdatum zugrunde zu legen; das Erscheinungsdatum wäre dann heranzuziehen, wenn das Einreichungsdatum nicht feststellbar ist. Es ist notwendig, an diesem Grundsatz als an einer vereinbarten Norm festzuhalten, da bei dem starken Austausch an Gedankengut, den die heutige wissenschaftliche Arbeitsweise erfreulicherweise einschließt, eine Abgrenzung auf andere Weise überhaupt nicht möglich wäre. Auch bei Erfindungen gilt bekanntlich nach dem Deutschen Patentgesetz für die Priorität das Anmeldedatum.

Die folgenden Ausführungen sollen die erwähnten Diskussionen nicht fortsetzen; sie sollen jedoch einige Zusammenstellungen zur geschichtlichen Entwicklung auf der soeben besprochenen Grundlage geben, die von allgemeinem Interesse sein dürften.

In den Zusammenstellungen sind die drei wichtigsten Formen des Elektronenmikroskops unterschieden, nämlich das Durchstrahlungsmikroskop, das zur vergrößerten Abbildung eines Objekts mit Hilfe der in einer besonderen Strahlenquelle erzeugten durch das Objekt hindurchgehenden Elektronenstrahlen dient, das Emissionsmikroskop, bei dem eine Oberfläche mit Hilfe der von ihr selbst emittierten Elektronen abgebildet wird, und das Rückstrahlungsmikroskop, das eine Oberfläche mit Hilfe der in einer besonderen Strahlenquelle erzeugten, rückgestrahlten Elektronen abbildet. Unter einer mikroskopischen Auflösung wird eine solche verstanden, wie sie beim Lichtmikroskop einschließlich UV-Mikroskop erzielt werden kann; höhere Auflösungen werden als übermikroskopisch bezeichnet. Die Grenze zwischen beiden Gebieten wird bei etwa 100 mμ für den Abstand zweier benachbarter Punkte angenommen. Geräte, mit denen eine übermikroskopische Auflösung erreicht wird, heißen Übermikroskope; sie können dabei Durchstrahlungs-, Emissions- oder Rückstrahlungsmikroskope sein.

In Tabelle I sind die jeweils ersten Veröffentlichungen über die entscheidenden Fortschritte der Entwicklung zusammengestellt. Neben den Einreichungsdaten sind auch die Erscheinungsdaten dieser Veröffentlichungen angegeben. Ferner ist zwischen der Anwendung magnetischer und elektrischer Linsen unterschieden. Die Tabelle I gibt also Aufschluß über die ersten Bekanntmachungen der erreichten technischen Entwicklungsstufen.

Tabelle I

Elektronenmikroskope

Mikroskopische Auflösung, $\delta > 100\ m\mu$

Einreich-Jahr	Durchstrahlungsgerät		Emissionsgerät		Rückstrahlungsgerät
	Magnetische Linsen	Elektrische Linsen	Magnetische Linsen	Elektrische Linsen	Magnetische Linsen
1931	M. Knoll und E. Ruska, Ann. d. Phys. **12**, 607—661 1932. Eingereicht: 10. September 1931, erschienen: H. 5/6, Febr. 1932.	[1]	M. Knoll und E. Ruska, Ann. d. Phys. **12**, 607—661, 1932. Eingereicht: 10. September 1931, erschienen: H. 5/6, Februar 1932.	[1] E. Brüche und H. Johannson, Naturwiss. **20**, 49, 1932. Eingereicht: November 1931, erschienen: H. 3. 15. Jan. 1932 (ohne Gerätebeschreibung)	
1932		H. Johannson und O. Scherzer, Zeitschr. f. Phys. **80**, 183—192, 1932. Eingereicht: 20. November 1932, erschienen: H. 3/4, 28. Januar 1933.	M. Knoll, F. G. Houtermans und W. Schulze, Verh. d. dtsch. Phys. Ges. **18**, 23—24, 1932. Vortrag: 14. Februar 1932, erschienen: 31. Juli 1932.	Naturwiss. **20**, 353 bis 358, 1932. erschienen: H. 21, 20. Mai 1932.	

1) Die Arbeit von Knoll und Ruska in den Annalen der Physik, eingereicht 10. September 1931, enthält schon mit elektrischen Linsen erzielte Bilder von durchstrahlten Objekten und emittierenden Kathoden; die dabei verwendete Linse war aber praktisch nicht leistungsfähig und wurde von den Autoren nicht weiterentwickelt.

Mikroskopische Auflösung, $\delta > 100\,m\mu$

Einreich-Jahr	Durchstrahlungsgerät		Emissionsgerät		Rückstrahlungsgerät
	Magnetische Linsen	Elektrische Linsen	Magnetische Linsen	Elektrische Linsen	Magnetische Linsen
1933					E. Ruska, Zeitschrift f. Phys. **83**, 492—497, 1933. Eingereicht: 2. Mai 1933, erschienen: H. 7/8, 5. Juli 1933.

Übermikroskopische Auflösung, $\delta < 100\,m\mu$

1933	E. Ruska, Zeitschrift f. Phys. **87**, 580—602, 1934. Eingereicht: 12. Dezember 1933, erschienen: Februar 1934				
1938	B. v. Borries und E. Ruska, Wiss. Veröff. Siemens **17**, 99—106, 1938. Eingereicht: 25. Februar 1938, erschienen: März 1938.				
1939		H. Mahl, Naturwiss. **27**, 417, 1939. Eingereicht: 8. Mai 1939, erschienen: 9. Juni 1939 (ohne Gerätebeschreibung). Zeitschr. f. techn. Phys. **20**, 316/317, 1939. Eingereicht: 8. September 1939, erschienen: November 1939.			
1940					B. v. Borries, Zeitschr. f. Phys. **116**, 370—378, 1940 Eingereicht: 8. August 1940, erschienen: September 1940
1941				E. Brüche, in C. Ramsauer, Elektronenmikroskopie 2. Aufl. 1942, S. 6, mit Ergebnissen von Mecklenburg (ohne Gerätebeschreibung). Eingereicht: 22. Dezember 1941, erschienen: Springer, an Buchhandel ab 14. März 1942.	
1942			E. Kinder, Naturwiss. **30**, 591, 1942. Eingereicht: Mai 1942, erschienen: 18. September 1942		

Zur Vervollständigung des damit gegebenen Überblicks seien noch drei weitere Formen des Elektronenmikroskops mit den ersten Veröffentlichungen angeführt:

1. Das Feldelektronenmikroskop.

   Es ist ein Emissionsmikroskop, bei dem keine Linsen zur Fokussierung der Elektronenstrahlen verwendet werden.

   E. W. Müller, Zeitschr. f. Phys. **106**, 541, 1937; eingereicht: 22. Mai 1937; erschienen: H. 9/10, August 1937.

2. Das Elektronenrastermikroskop.

   Es ist ein Elektronenmikroskop, bei dem das Objekt mit einem Elektronenstrahl Punkt für Punkt abgetastet und seine Abbildung in zeitlicher Aufeinanderfolge Punkt für Punkt zusammengesetzt wird.

   M. v. Ardenne, Zeitschr. f. techn. Phys. **19**, 407, 1938; eingereicht: 7. September 1938; erschienen: Ende November 1938.

3. Das Schattenmikroskop.

   Es ist ein Elektronenmikroskop, bei dem das Objekt in die Nähe der Spitze eines kegelförmigen Elektronenstrahls gebracht wird, so daß zwischen Objekt und Bildschirm keine Linsen erforderlich sind.

   H. Boersch, Naturwiss. **27**, 418, 1939; eingereicht: 8. Mai 1939; erschienen: Juni 1939; Zeitschr. f. techn. Phys. **20**, 346, 1939; eingereicht: 14. Oktober 1939; erschienen: Ende Dezember 1939.

Über die bei den Übermikroskopen benutzten Vergrößerungslinsen und ihre erste Einführung in die Übermikroskopie unterrichtet die Tabelle II.

Tabelle II

Die Vergrößerungslinsen der Übermikroskope

	Anordnung angegeben von	Benutzt für Durchstrahlungs-Übermikroskop	Benutzt für Emissions-Übermikroskop	Benutzt für Rückstrahl-Übermikroskop
Magnetische Polschuhlinse (Objektiv und Projektiv)	Als Vergrößerungslinse für Elektronenmikroskop[1]) B. v. Borries und E. Ruska, DRP. 680284 vom 17. März 1932	E. Ruska, Zeitschrift f. Phys. **87**, 580—582, 1934. Eingereicht: 12. Dezember 1933, erschienen: Februar 1934	E. Kinder, Naturwiss. **30**, 591, 1942. Eingereicht: Mai 1942, erschienen: 18. September 1942	B. v. Borries, Zeitschr. f. Phys. **116**, 370—378, 1940. Eingereicht: 8. August 1940, erschienen: September 1940.
Elektrische Einzellinse mit drei Elektroden (Objektiv und Projektiv)	Als Konzentrierungsvorrichtung für den Kathodenstrahloszillographen: M. Knoll, DRP. 690809 vom 10. November 1929	H. Mahl und H. Boersch, Naturwiss. **27**, 417 bis 418, 1939. Eingereicht: 8. Mai 1939, erschienen: 9. Juni 1939		
Elektrisches Immersionsobjektiv	Als Objektiv für Elektronenmikroskop: H. Johannson, vgl. E. Brüche und H. Johannson, Naturwiss. **20**, 353—358, 1932. erschienen: 20. Mai 1932		W. Mecklenburg vgl. E. Brüche in C. Ramsauer, Elektronenmikroskopie, 2. Aufl. 1942, S. 6. Eingereicht: 22. Dezember 1941, erschienen: Springer, an Buchhandel ab 14. März 1942	

Tabelle III zeigt, wie nach den darüber erschienenen Veröffentlichungen das Auflösungsvermögen schrittweise gesteigert wurde. Dabei ist immer nur der jeweils nächste Fortschritt in der Auflösung angeführt ohne Rücksicht darauf, ob er mit magnetischen oder elektrischen Linsen erzielt wurde. Zu beachten ist, daß in der ersten Zeit die Auflösung nach etwas verschiedenen Gesichtspunkten definiert wurde, wie dies aus der Tabelle zu ersehen ist.

1) Prinzip der Feldkonzentration und Anordnung der Eisenkapselung zur Brennweitenverkürzung: E. Ruska, vgl. E. Ruska und M. Knoll, Zeitschr. f. techn. Phys. **12**, 389 u. 448, 1931. Eingereicht: 28. April 1931; erschienen: August und September 1931.

Tabelle III.

Auflösungsvermögen der Elektronenmikroskope

Auflösung entsprechend	Einreichjahr	Nachweisverfahren	Autor	Zeitschrift
		1. Durchstrahlungsmikroskope		
50 mμ	1933	Kantenschärfe	E. Ruska	Zeitschr. f. Phys. **87**, 580, 1934
40 mμ	1935	Dicke eines Einzelteils	E. Driest und H. O. Müller	Zeitschr. f. wiss. Mikrosk. **52**, 53, 1935
25 mμ	1937	Gitterabstand	F. Krause und D. Beischer	Naturwiss. **25**, 828, 1937
10 mμ	1937	Gitterabstand	F. Krause und D. Beischer	Naturwiss. **25**, 828, 1937
10 mμ	1938	Trennung von Punkten	B. v. Borries und E. Ruska	Wiss. Veröff. Siemens **17**, 99, 1938
7 mμ	1939	Trennung von Punkten	B. v. Borries und E. Ruska	Zeitschr. f. techn. Phys. **20**, 232, 1939
5 mμ	1939	Trennung von Punkten	O. E. Radszewski, H. O. Müller und W. Eitel	Zement **28**, 693, 1939
4 mμ	1940	Trennung von Punkten	M. v. Ardenne	Naturwiss. **28**, 113, 1940
3 mμ	1940	Trennung von Punkten	M. v. Ardenne	Zeitschr. f. phys. Chem. (A) **187**, 1, 1940
2,5 mμ	1940	Trennung von Punkten	B. v. Borries und E. Ruska	Erg. d. exakt. Naturwiss. **19**, 271, 1940
2,2 mμ	1941	Trennung von Punkten	M. v. Ardenne	Physik. Zeitschr. **42**, 72, 1941
		2. Emissionsmikroskope		
140 mμ	1941	Trennung von Punkten	W. Mecklenburg, vgl. E. Brüche	Ramsauer, Elektronenmikroskopie, Springer, Berlin 1942
70 mμ	1942	Trennung von Punkten	H. Boersch	Naturwiss. **30**, 120, 1942
55 mμ	1942	Trennung von Punkten	W. Mecklenburg, vgl. E. Brüche	Kolloidzeitschr. **100**, 192, 1942
40 mμ	1942	Trennung von Punkten	W. Mecklenburg	Zeitschr. f. Phys. **120**, 21, 1942
		3. Rückstrahlungsmikroskope		
25 mμ	1940	Trennung von Strichen	B. v. Borries	Zeitschr. f. Phys. **116**, 370, 1940

Schlußfolgerungen

Aus den Tabellen sind folgende Tatsachen abzulesen:

1. Die Priorität für das erste Elektronenmikroskop gebührt M. Knoll und E. Ruska (1931).
2. Das im ersten Übermikroskop verwendete Objektiv wurde von B. v. Borries und E. Ruska angegeben (1932).
3. Die Priorität für den Bau des ersten Übermikroskops gebührt E. Ruska (1933).
4. Das erste für den allgemeinen praktischen Gebrauch durchgebildete Übermikroskop ist von B. v. Borries und E. Ruska entwickelt worden (1938).
5. Übermikroskopische Auflösung wurde beim Durchstrahlungsgerät zuerst von E. Ruska (1933), beim Rückstrahlungsgerät zuerst von B. v. Borries (1940), beim Emissionsgerät zuerst von W. Mecklenburg (1941) erreicht.
6. Die jeweilig besten Auflösungen mittels Durchstrahlungsmikroskopen und damit die zu diesen Zeitpunkten besten Auflösungen mittels Elektronenlinsen überhaupt sowie die Ergebnisse bei Rückstrahlung sind mit magnetischen Linsen erzielt worden.
7. Die jeweilig besten Auflösungen mittels Emissionsmikroskopen sind durchweg später, und zwar mit elektrischen Linsen erzielt worden.

Es sei noch bemerkt, daß sich an diesen Folgerungen nichts ändert, wenn man neben den wissenschaftlichen Veröffentlichungen die für das Gebiet der Elektronenmikroskopie grundlegenden Schutzrechte mit berücksichtigt.

Berlin-Siemensstadt, Zentrale Entwicklungsstellen der Siemens & Halske AG., Oktober 1943.

(*Eingegangen 4. Oktober 1943*)

NACHRICHTEN

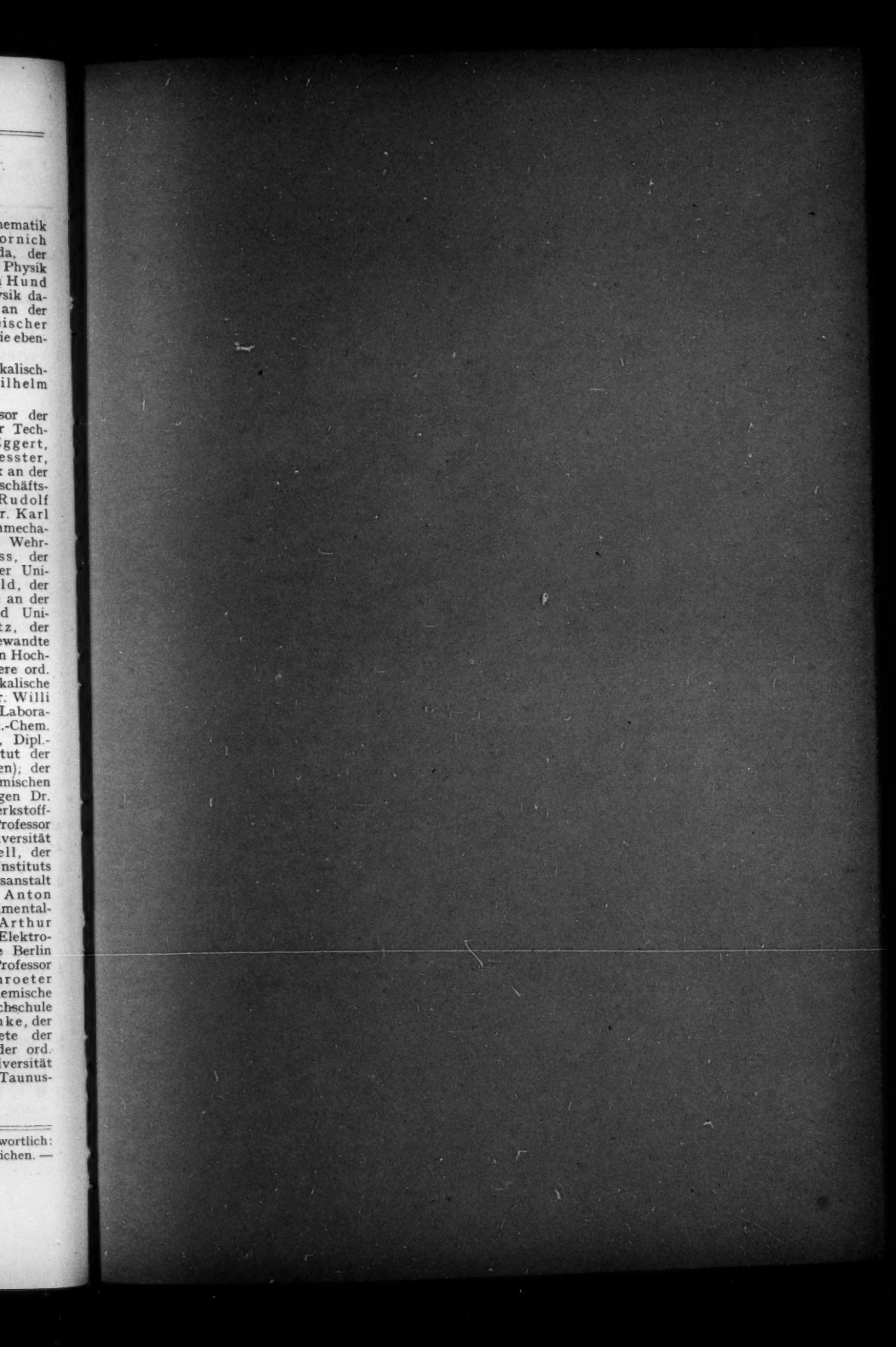
Dozenturen: An der Universität Greifswald Dr. Rudolf Schulze (bisher an der Universität Berlin) für Strahlenphysik, an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Joachim Stauff (bisher an der Universität Frankfurt a. M.) für physikalische Chemie, an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Erich Kaden für Fernsprech- und Telegraphentechnik, an der Universität Berlin Dr. Luise Holzapfel für Chemie, an der Technischen Hochschule Dr. Gustav Weymann für Fernmeldetechnik, an der Universität Halle Dr. Friedrich Asinger für Chemische Technologie und Dr. Wilhelm Maier für Physik, an der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Richard Lepsius für chemische Technologie insbesondere Kunststoffe, an der Technischen Hochschule München Dr. Martin Strell für Organische und Allgemeine Chemie, an der Universität Bonn Dr. Werner Wiebe für Physik, an der Universität Berlin Dr. Kurt Ueberreiter für Chemie.

Ernannt: Der außerplanmäßige Professor der Astronomie an der Universität Bonn Dr. Oswald Wachtl zum wissenschaftlichen Rat an der Universität Straßburg, der Regierungsrat Dozent für Physik an der Universität Tübingen Dr. Heinz Verleger zum außerordentlichen Professor daselbst, Dozent Dr. G. Hesse an der Universität Marburg zum a. o. Professor für organische Chemie daselbst, der ord. Professor der anorganischen Chemie an der Universität Halle Dr. Karl Ziegler zum Leiter des Kaiser-Wilhelm-Institutes für Kohleforschung in Mülheim (Ruhr), der Dozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr.-Ing. Lothar Collatz zum ord. Professor für reine und angewandte Mathematik an der Technischen Hochschu le Hannover, der Dozent für organische und pharmazeutische Chemie an der Universität Budapest Dr. A. Müller zum a. o. Professor daselbst, der ord. Professor für technische Physik an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Dr. Werner Kluge zugleich zum Honorarprofessor an der Deutschen Karls-Universität daselbst, der Dozent für chemische Technologie synthetischer Fasern an der Technischen Hochschule Breslau Dr. Karl Lauer zum außerplanmäßigen Professor daselbst, der Dozent für Physik an der Universität Berlin Dr. Otto v. Auwers zum außerplanmäßigen Professor daselbst, der außerplanmäßige Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Carl Mahr zum außerordentlichen Professor für Chemie an der Universität Marburg, der Direktor am Physikalisch-chemischen Institut der Universität Agram Professor Dr. I. Plotnikow zum ord. Ehrenprofessor ebenda, der Dozent für theoretische Physik an der Universität Königsberg Dr. Ernst Reichenberger zum außerplanmäßigen Professor ebenda, der Dozent an der Technischen Hochschule Graz Dr. Friedrich Hecht zum außerordentlichen Professor für anorganische und physikalische Chemie ebenda, der Dozent für Mathematik an der Universität Wien Dr. Hans Hornich zum außerplanmäßigen Professor ebenda, der ordentliche Professor der mathematischen Physik an der Universität Leipzig Dr. Friedrich Hund zum ord. Professor der theoretischen Physik daselbst, der außerordentliche Professor an der Universität Straßburg Dr. Dietrich Beischer zum ord. Professor für Anorganische Chemie ebendaselbst.

Verliehen: Dem Direktor an der Physikalisch-technischen Reichsanstalt in Berlin Dr. Wilhelm Koesters der Titel Professor.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Geodäsie und Vermessungskunde an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Otto Eggert, der deutsche Filmpionier Dr. Oskar Messter, der außerordentliche Professor der Physik an der Universität Jena und Mitglied der Geschäftsleitung der Firma Carl Zeiss daselbst Dr. Rudolf Straubel, der Erdbebenforscher Prof. Dr. Karl Mainka in Ratibor, der Leiter der Feinmechanischen und Optischen Werke R. Fuess Wehrwirtschaftsführer Ingenieur Paul Fuess, der ord. Professor der Kolloidchemie an der Universität Leipzig Dr. Wolfgang Ostwald, der ord. Professor der anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule Hannover und Universität Göttingen Dr. Wilhelm Biltz, der emer. ord. Professor für reine und angewandte Mathematik an der Deutschen Technischen Hochschule Prag Dr. Karl Carda, der frühere ord. Professor für Metallkunde und physikalische Chemie an der Bergakademie Freiberg Dr. Willi Heike, der Assistent am Chemischen Laboratorium der Universität Rostock Dipl.-Chem. F. Gessert (auf dem Balkan gefallen), Dipl.-Chem. H. Nass vom Chemischen Institut der Universität Würzburg (im Osten gefallen), der frühere ord. Professor der Chemie und chemischen Technologie an der Universität Göttingen Dr. Arthur Kötz, der Direktor des Werkstoffprüfungsamtes und außerplanmäßige Professor für Technologie der Baustoffe an der Universität Königsberg Dr. Hans Wolfgang Genell, der emeritierte Direktor des Chemischen Instituts der Preußischen Versuchs- und Forschungsanstalt für Milchwirtschaft in Kiel Professor Dr. Anton Burr, der frühere ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Berlin Dr. Arthur Wehnelt, der Honorarprofessor für Elektrochemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Viktor Engelhardt, der emer. ord. Professor für Chemie Dr. med. Dr. phil. Georg Schroeter in Berlin, der frühere ord. Professor für chemische Technologie an der Technischen Hochschule Braunschweig Geh. Hofrat Dr. Otto Reinke, der französische Forscher auf dem Gebiete der Kolloidchemie Professor Paul Bary, der ord. Professor der Meteorologie an der Universität Frankfurt a. M. und Direktor des Taunus-Observatoriums Dr. Franz Linke.

Verantwortlicher Schriftleiter: i. V. Dr. Ludwig Bewilogua, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1. — Druck: A. Heine GmbH., Gräfenhainichen. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany.



Die Hefte 19-24, Jahrg. 1943, der Physikalischen Zeitschrift befinden sich in Vorbereitung und folgen in kurzen Abständen.

Schriftleitung und Verlag